

Tổng Hợp Kiến Thức Phép Cộng Vector Trong Mặt Phẳng

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn toàn diện và chi tiết về phép cộng vector, một trong những phép toán nền tảng và quan trọng nhất của hình học vector trong chương trình Toán lớp 10.

1. Định nghĩa tổng của hai vector

Tổng của hai vector là một phép toán kết hợp hai vector để tạo ra một vector mới, gọi là vector tổng. Phép toán này được định nghĩa dựa trên quy tắc "đầu nối đuôi".

Định nghĩa: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kỳ, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Từ điểm B, vẽ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Công thức: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho 3 điểm phân biệt M, N, P. Tìm tổng của hai vector $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NP}$.

Lời giải: Theo định nghĩa phép cộng vectơ, ta lấy điểm đầu của vectơ thứ nhất (M) và điểm cuối của vectơ thứ hai (P). Vậy, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

- **Ví dụ 2:** Một người đi từ A đến B 3km về phía Đông, sau đó đi từ B đến C 4km về phía Bắc. Vectơ tổng hợp biểu diễn độ dịch chuyển của người đó là gì?

Lời giải: Ta có vectơ dịch chuyển thứ nhất là $\overrightarrow{AB}$ và vectơ dịch chuyển thứ hai là $\overrightarrow{BC}$. Vectơ tổng hợp biểu diễn độ dịch chuyển từ điểm xuất phát A đến điểm cuối C là $\overrightarrow{AC}$. Do đó, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ có hướng Đông-Bắc.

2. Các quy tắc cộng vectơ

Để đơn giản hóa việc tính toán và chứng minh, chúng ta sử dụng các quy tắc cộng vectơ cơ bản sau:

a. Quy tắc ba điểm (Quy tắc Chasles)

Đây là quy tắc cơ bản nhất, trực tiếp từ định nghĩa phép cộng vectơ, dùng để "chèn" điểm hoặc "nối" các vectơ.

Phát biểu: Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Giải thích: Điểm cuối của vectơ thứ nhất (B) phải trùng với điểm đầu của vectơ thứ hai (B) để tạo thành một vectơ có điểm đầu là điểm đầu của vectơ thứ nhất (A) và điểm cuối là điểm cuối của vectơ thứ hai (C).

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Rút gọn biểu thức vectơ: $P = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc ba điểm liên tiếp:

$$P = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}) + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

$$P = (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$$

Vậy $P = \overrightarrow{MR}$.

- **Ví dụ 2:** Cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Lời giải: Ta biến đổi vế trái bằng cách chèn điểm D vào $\overrightarrow{AB}$ và chèn điểm B vào $\overrightarrow{CD}$.

$$\text{Vế trái} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$$

$$\text{Vế trái} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$$

Vì $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{BD}$ là hai vectơ đối nhau nên $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

Vậy, Vế trái = $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0}$
= $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ = Vế phải (điều phải chứng minh).

b. Quy tắc hình bình hành

Quy tắc này dùng để cộng hai vectơ có chung điểm đầu.

Phát biểu: Nếu ABCD là một hình bình hành thì ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Giải thích: Với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ chung gốc A, tổng của chúng là vectơ đường chéo $\overrightarrow{AC}$ của hình bình hành ABCD có cạnh là AB và AD.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 3$, $AD = 4$. Tính độ dài của vectơ tổng $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải: Vì ABCD là hình chữ nhật nên nó cũng là một hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Độ dài của vectơ tổng là: $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC, ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $BC = AD = 4$. Do đó: $AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

Vậy $AC = 5$. Độ dài của vectơ tổng là 5.

- **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP}$.

Lời giải: Xét tứ giác AMNP. Vì M là trung điểm AB và N là trung điểm AC, nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Suy ra $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2} BC$.

Vì P là trung điểm BC nên $BP = PC = \frac{1}{2} BC$. Do đó $MN \parallel BP$ và $MN = BP$.

Tứ giác MNPB có $MN \parallel BP$ và $MN = BP$ nên MNPB là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP}$.

Tương tự, tứ giác AMNP có thể không phải là hình bình hành. Ta sẽ dùng cách khác.

Xét tứ giác AMPN. Ta có MP là đường trung bình tam giác ABC, suy ra $MP \parallel AC$ và $MP = \frac{1}{2} AC = AN$. Tương tự, NP là đường trung bình, $NP \parallel AB$ và $NP = \frac{1}{2} AB = AM$. Vậy tứ giác AMPN là hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP}$ (điều phải chứng minh).

3. Tính chất của phép cộng vectơ

Phép cộng vectơ có các tính chất tương tự như phép cộng các số thực.

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ta có:

• Tính chất giao hoán

Công thức: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Giải thích: Thứ tự cộng các vectơ không ảnh hưởng đến kết quả.

Ví dụ: Cho hình bình hành ABCD. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Đồng thời, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

• Tính chất kết hợp

Công thức: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Giải thích: Khi cộng ba vectơ, ta có thể cộng hai vectơ đầu tiên trước rồi cộng với vectơ thứ ba, hoặc cộng hai vectơ sau trước rồi cộng với vectơ đầu tiên.

Ví dụ: Rút gọn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Ta có thể tính: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Hoặc: $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Kết quả như nhau.

• Tính chất của vectơ-không

Công thức: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

Giải thích: Vectơ-không ($\vec{0}$) là phần tử trung hòa của phép cộng vectơ. Cộng một vectơ bất kỳ với vectơ-không sẽ cho kết quả là chính vectơ đó.

Ví dụ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$.

4. Vectơ đối và Phép trừ vectơ

Phép trừ vectơ được định nghĩa thông qua phép cộng với vectơ đối.

a. Vectơ đối

Định nghĩa: Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là một vectơ được ký hiệu là $-\vec{a}$, sao cho tổng của chúng bằng vectơ-không: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Giải thích: Vectơ đối của $\vec{a}$ là vectơ có cùng độ dài nhưng ngược hướng với $\vec{a}$.

Tính chất quan trọng: Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$. Tức là: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Ví dụ: Vectơ đối của vectơ chỉ vận tốc một chiếc xe đang đi về phía Bắc với tốc độ 50 km/h là vectơ chỉ vận tốc 50 km/h về phía Nam.

b. Phép trừ hai vectơ

Định nghĩa: Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ với vectơ đối của $\vec{b}$.

Công thức: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

c. Quy tắc trừ

Từ định nghĩa phép trừ, ta có quy tắc trừ rất hữu ích sau đây:

Phát biểu: Với ba điểm O, A, B bất kỳ, ta luôn có:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

Giải thích: Hiệu của hai vectơ có chung điểm đầu O là một vectơ có điểm đầu là điểm cuối của vectơ trừ (A) và điểm cuối là điểm cuối của vectơ bị trừ (B).

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo các vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc trừ với điểm gốc C, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

- **Ví dụ 2:** Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc trừ cho cả hai vế:

$$\text{Vế trái: } \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}.$$

Vế phải: $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$.

Vì Vế trái = Vế phải = $\overrightarrow{DC}$, nên đẳng thức được chứng minh.

5. Ứng dụng và Bài tập vận dụng

Các quy tắc và tính chất của phép cộng, trừ vectơ là công cụ mạnh mẽ để giải quyết nhiều bài toán hình học.

Bài tập 1: Chứng minh đẳng thức vectơ trong tam giác

Đề bài: Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Lời giải:

- Gọi M là trung điểm của BC. Theo tính chất trọng tâm, G nằm trên trung tuyến AM và $AG = \frac{2}{3} AM$.
- Xét tổng $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$. Vì M là trung điểm BC, ta có thể dựng hình bình hành BGCD (với D là điểm sao cho BGCD là hình bình hành). Khi đó M là trung điểm của GD.
- Theo quy tắc trung điểm (hệ quả của quy tắc hình bình hành): $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.
- Vậy, ta cần chứng minh: $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

5. Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ cùng nằm trên đường thẳng AM. Chúng ngược hướng (G nằm giữa A và M).
6. Độ dài: $|\overrightarrow{GA}| = AG$ và $|\overrightarrow{GM}| = GM$.
Theo tính chất trọng tâm, $AG = 2GM$. Do đó, $|\overrightarrow{GA}| = 2|\overrightarrow{GM}|$.
7. Từ đó suy ra $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$.
8. Thay vào biểu thức cần chứng minh: $-2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. Đây là đẳng thức đúng.
9. Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Bài tập 2: Tính độ dài vectơ tổng

Đề bài: Cho hình vuông ABCD cạnh a , tâm O. Tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Lời giải:

1. Gọi I là trung điểm của AB. Trong tam giác OAB, vì $OA = OB$ (tính chất đường chéo hình vuông), tam giác OAB cân tại O. OI là đường trung tuyến nên cũng là đường cao.
2. Áp dụng quy tắc trung điểm cho tổng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.
3. Độ dài của vectơ $\vec{u}$ là $|\vec{u}| = |2\overrightarrow{OI}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI$.

4. OI là đường trung bình của tam giác ABD (nếu kẻ đường thẳng qua O song song với AD) hoặc đơn giản OI vuông góc với AB và I là trung điểm AB . Xét tam giác vuông OIA , ta có $OI^2 + IA^2 = OA^2$.
5. Đường chéo AC của hình vuông là $a\sqrt{2}$. Do đó $OA = AC/2 = (a\sqrt{2})/2$.
6. Trong tam giác vuông OAB , OI là đường cao. OI cũng là đường trung bình của tam giác ABC kẻ từ B đến AC (không đúng). Cách đơn giản hơn: OI là khoảng cách từ O đến AB . Vì O là tâm hình vuông, khoảng cách này bằng một nửa cạnh hình vuông. Vậy $OI = a/2$.
7. Do đó, độ dài của vector $\vec{u}$ là $2OI = 2 * (a/2) = a$.
8. **Cách khác:** Dựng hình bình hành $OAEB$. Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$. Tứ giác $OAEB$ là hình thoi vì $OA=OB$. Góc $AOB = 90^\circ$, nên $OAEB$ là hình vuông. Do đó $OE = OA * \sqrt{2}$. Mà $OA = (a\sqrt{2})/2$. Vậy $OE = (a\sqrt{2})/2 * \sqrt{2} = a$. Độ dài vector tổng là a .