

Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc bằng góc giữa hai mặt phẳng

Trong hình học không gian lớp 11, việc chứng minh hai mặt phẳng vuông góc là một dạng toán quan trọng. Có nhiều phương pháp để thực hiện, và một trong những phương pháp cơ bản nhất, xuất phát trực tiếp từ định nghĩa, là sử dụng góc giữa hai mặt phẳng. Tài liệu này sẽ tổng hợp đầy đủ kiến thức lý thuyết và các ví dụ minh họa chi tiết về phương pháp này.

1. Nhắc lại: Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc được tạo bởi hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến của chúng tại một điểm.

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song hoặc trùng nhau, góc giữa chúng bằng 0° .
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ , ta dựng một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ . Khi đó, góc giữa (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b, với $a = (P) \cap (R)$ và $b = (Q) \cap (R)$.

Quy ước: Góc giữa hai mặt phẳng, ký hiệu là $((P), (Q))$, luôn là góc nhọn hoặc góc vuông, tức là $0^\circ \leq ((P), (Q)) \leq 90^\circ$.

2. Phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q), ta thực hiện theo 3 bước sau đây. Đây là quy trình nền tảng để áp dụng vào bài toán chứng minh vuông góc.

- Bước 1: Tìm giao tuyến.** Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q).
- Bước 2: Dựng đường thẳng thứ nhất.** Từ một điểm I bất kỳ trên giao tuyến Δ , trong mặt phẳng (P), ta kẻ một đường thẳng a vuông góc với Δ tại I.
- Bước 3: Dựng đường thẳng thứ hai.** Cũng tại điểm I, trong mặt phẳng (Q), ta kẻ đường thẳng b vuông góc với Δ .

Kết luận: Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) chính là góc giữa hai đường thẳng a và b vừa dựng. Tức là: $((P), (Q)) = (a, b)$.

Lưu ý: Trong quá trình giải toán, ta thường chọn điểm I và các đường thẳng a, b sao cho việc tính toán góc trở nên thuận lợi nhất, ví dụ như dựa vào các tam giác vuông, các tính chất của hình đặc biệt.

3. Định lý về điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

Từ định nghĩa và cách xác định góc, ta có một định lý vô cùng quan trọng, là cơ sở của phương pháp chứng minh trong bài này.

Định lý

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Công thức: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow ((P), (Q)) = 90^\circ$

Giải thích: Dựa vào phương pháp xác định góc ở trên, để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, ta chỉ cần chứng minh hai đường thẳng a và b (lần lượt nằm trong (P) và (Q), cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm) vuông góc với nhau.

4. Phương pháp và ví dụ áp dụng

Phương pháp chứng minh tổng quát

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau bằng phương pháp góc, ta thực hiện các bước:

- Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ của (P) và (Q).
- Bước 2:** Tìm hoặc dựng hai đường thẳng $a \subset (P)$ và $b \subset (Q)$ sao cho cả hai cùng vuông góc với giao tuyến Δ tại cùng một điểm I.
- Bước 3:** Chứng minh rằng góc giữa a và b bằng 90° (tức là $a \perp b$).
- Bước 4:** Kết luận: Vì góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa a và b , mà góc này bằng 90° , nên $(P) \perp (Q)$.

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Đề bài: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng mặt phẳng (ACC'A') vuông góc với mặt phẳng (BDD'B').

Phân tích và lời giải:

- Bước 1: Tìm giao tuyến.**

Gọi O là tâm của mặt đáy ABCD và O' là tâm của mặt đáy A'B'C'D'.

Ta thấy O là giao điểm của AC và BD , O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Điểm O thuộc AC nên $O \in (ACC'A')$.

Điểm O thuộc BD nên $O \in (BDD'B')$.

Tương tự, $O' \in (ACC'A')$ và $O' \in (BDD'B')$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ là đường thẳng OO' .

• Bước 2: Dựng các đường thẳng vuông góc với giao tuyến.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, ta có đường thẳng AC .

Trong mặt phẳng $(BDD'B')$, ta có đường thẳng BD .

Ta cần chứng minh AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến OO' tại O .

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $OO' \perp (ABCD)$. Do đó, OO' vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong $(ABCD)$, suy ra **$OO' \perp AC$** tại O và **$OO' \perp BD$** tại O .

• Bước 3: Tính góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

Góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ chính là góc giữa hai đường thẳng AC và BD .

Vì $ABCD$ là hình vuông (đáy của hình lập phương) nên hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O .

Suy ra, góc giữa AC và BD là 90° .

• Bước 4: Kết luận.

Góc giữa $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ bằng 90° . Vậy **$(ACC'A') \perp (BDD'B')$** .

Ví dụ 2

Đề bài: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

Phân tích và lời giải:

- **Bước 1: Tìm giao tuyến.**

Điểm S là điểm chung thứ nhất.

O là giao điểm của AC và BD. $O \in AC$ nên $O \in (SAC)$. $O \in BD$ nên $O \in (SBD)$.

Vậy O là điểm chung thứ hai.

Giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng **SO**.

- **Bước 2: Tìm các đường thẳng vuông góc với giao tuyến.**

Xét mặt phẳng (SAC): Tam giác SAC có $SA = SC$ (giả thiết) nên là tam giác cân tại S. SO là đường trung tuyến (vì O là trung điểm AC) nên đồng thời là đường cao. Suy ra **$AC \perp SO$** .

Xét mặt phẳng (SBD): Tam giác SBD có $SB = SD$ (giả thiết) nên là tam giác cân tại S. SO là đường trung tuyến (vì O là trung điểm BD) nên đồng thời là đường cao. Suy ra **$BD \perp SO$** .

- **Bước 3: Tính góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.**

Ta đã tìm được $AC \subset (SAC)$, $AC \perp SO$ và $BD \subset (SBD)$, $BD \perp SO$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) chính là góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

Theo tính chất của hình thoi, hai đường chéo vuông góc với nhau, tức là **$AC \perp BD$** .

Do đó, góc giữa AC và BD là 90° .

- **Bước 4: Kết luận.**

Góc giữa (SAC) và (SBD) bằng 90° . Vậy **$(SAC) \perp (SBD)$** .

Ví dụ 3

Đề bài: Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Phân tích và lời giải:

- **Bước 1: Tìm giao tuyến.**

Dễ dàng thấy O và B là hai điểm chung của hai mặt phẳng (OAB) và (OBC).

Vậy giao tuyến của chúng là đường thẳng **OB**.

- **Bước 2: Tìm các đường thẳng vuông góc với giao tuyến.**

Trong mặt phẳng (OAB), ta có đường thẳng OA.

Theo giả thiết, OA, OB, OC đôi một vuông góc, suy ra **$OA \perp OB$** .

Trong mặt phẳng (OBC), ta có đường thẳng OC.

Theo giả thiết, ta cũng có **$OC \perp OB$** .

- **Bước 3: Tính góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.**

Góc giữa hai mặt phẳng (OAB) và (OBC) chính là góc giữa hai đường thẳng OA và OC.

Theo giả thiết, OA và OC vuông góc với nhau.

Do đó, góc giữa OA và OC là 90° .

- **Bước 4: Kết luận.**

Góc giữa (OAB) và (OBC) bằng 90° . Vậy **$(OAB) \perp (OBC)$** .

Ghi chú: Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng vuông góc bằng cách chỉ ra một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia thực chất là một hệ quả trực tiếp của phương pháp góc này. Khi có một đường thẳng $d \subset (P)$ và $d \perp (Q)$, ta có thể dễ dàng suy ra góc giữa hai mặt phẳng là 90° .