

Chuyên đề: Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc đáy

Đây là một dạng toán quan trọng và thường gặp trong chương trình Hình học không gian lớp 12 cũng như trong các kỳ thi THPT Quốc gia. Nắm vững phương pháp sẽ giúp học sinh giải quyết bài toán một cách nhanh chóng và chính xác.

I. Kiến thức nền tảng

1. Định nghĩa mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình chóp đó. Tâm của mặt cầu này cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp, và khoảng cách đó chính là bán kính của mặt cầu.

2. Điều kiện để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp

Một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đa giác đáy của nó nội tiếp được trong một đường tròn. Hầu hết các hình chóp trong chương trình phổ thông (đáy là tam giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân,...) đều thỏa mãn điều kiện này.

3. Nguyên tắc chung xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp (I)

Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp phải thỏa mãn hai điều kiện:

- I cách đều các đỉnh ở mặt đáy ($IA = IB = IC = \dots$). Suy ra I nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Trục này là đường thẳng vuông góc với

mặt phẳng đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

- I cách đều một đỉnh ở đáy và đỉnh của hình chóp (ví dụ $IA = IS$). Suy ra I nằm trên mặt phẳng trung trực của cạnh bên SA.

Vậy, **tâm I là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.**

II. Phương pháp xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Xét hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($A_1A_2...A_n$). Ta có phương pháp xác định tâm và bán kính như sau:

1. Cách dựng tâm I

1. **Bước 1:** Xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy ($A_1A_2...A_n$).
2. **Bước 2:** Từ O, dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng đáy ($A_1A_2...A_n$). Đường thẳng d này chính là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do SA cũng vuông góc với đáy nên $d \parallel SA$.
3. **Bước 3:** Gọi M là trung điểm của cạnh bên SA. Dựng mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với SA (mặt phẳng trung trực của SA). Do $SA \parallel d$ nên mặt phẳng (P) sẽ cắt d.
4. **Bước 4:** Giao điểm I của đường thẳng d và mặt phẳng (P) chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải thích: Vì $I \in d$ nên I cách đều các đỉnh ở đáy. Vì $I \in (P)$ nên I cách đều S và A. Do đó, I cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp.

2. Công thức tính bán kính R

Xét tứ giác AMIO (với A là một đỉnh đáy, M là trung điểm SA, O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, I là tâm mặt cầu).

- Ta có $d \perp (\text{đáy})$ và $OA \subset (\text{đáy}) \Rightarrow d \perp OA$ hay $IO \perp OA$.
- Ta có $(P) \perp SA$ và $M \in (P) \Rightarrow IM \perp SA$.
- Ta có $d // SA$.

Từ các điều trên, suy ra tứ giác AMIO là hình chữ nhật.

- $IO = AM = SA / 2$
- $IM = AO = r_{\text{đáy}}$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy)

Bán kính mặt cầu R là khoảng cách từ tâm I đến một đỉnh bất kỳ, ví dụ IA.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông IOA, ta có:

$$R^2 = IA^2 = IO^2 + OA^2 = (SA/2)^2 + r_{\text{đáy}}^2$$

Công thức tổng quát: $R = \sqrt{(r_{\text{đáy}})^2 + (h/2)^2}$

Trong đó:

- **R** là bán kính mặt cầu ngoại tiếp.
- **$r_{\text{đáy}}$** là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- **h** là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy (chiều cao của hình chóp).

III. Áp dụng vào các trường hợp cụ thể

Trường hợp 1: Đáy là tam giác

Ví dụ 1: Đáy là tam giác vuông

Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a$. Tam giác ABC vuông tại B , có $AB = a$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Giải:

1. Tính bán kính đáy ($r_{\text{đáy}}$):

Đáy ABC là tam giác vuông tại B . Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền. Cạnh huyền $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Vậy, $r_{\text{đáy}} = AC/2 = 2a/2 = a$.

2. Tính chiều cao (h):

$h = SA = a$.

3. Tính bán kính mặt cầu (R):

Áp dụng công thức: $R = \sqrt{r_{\text{đáy}}^2 + (h/2)^2}$

$R = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} = \sqrt{a^2 + a^2/4} = \sqrt{5a^2/4} = (a\sqrt{5})/2$.

Ví dụ 2: Đáy là tam giác đều

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Tam giác ABC là tam giác đều cạnh a . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải:

1. Tính bán kính đáy ($r_{\text{đáy}}$):

Đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều được tính bằng công thức: $r = (\text{cạnh} \times \sqrt{3}) / 3$.

$$\text{Vậy, } r_{\text{đáy}} = (a\sqrt{3})/3.$$

2. Tính chiều cao (h):

$$h = SA = 2a.$$

3. Tính bán kính mặt cầu (R):

Áp dụng công thức: $R = \sqrt{(r_{\text{đáy}})^2 + (h/2)^2}$

$$R = \sqrt{((a\sqrt{3})/3)^2 + (2a/2)^2} = \sqrt{(3a^2/9) + a^2} = \sqrt{(a^2/3) + a^2} = \sqrt{(4a^2/3)} = (2a)/\sqrt{3} = (2a\sqrt{3})/3.$$

Trường hợp 2: Đáy là tứ giác

Ví dụ 3: Đáy là hình chữ nhật

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải:

1. Tính bán kính đáy ($r_{\text{đáy}}$):

Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm hai đường chéo, và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

$$\text{Đường chéo } AC = \sqrt{(AB^2 + AD^2)} = \sqrt{(a^2 + (2a)^2)} = \sqrt{(a^2 + 4a^2)} = a\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy, } r_{\text{đáy}} = AC/2 = (a\sqrt{5})/2.$$

2. Tính chiều cao (h):

$$h = SA = a\sqrt{2}.$$

3. Tính bán kính mặt cầu (R):

Áp dụng công thức: $R = \sqrt{r_{\text{đáy}}^2 + (h/2)^2}$

$$R = \sqrt{((a\sqrt{5})/2)^2 + ((a\sqrt{2})/2)^2} = \sqrt{(5a^2/4) + (2a^2/4)} = \sqrt{(7a^2/4)} = (a\sqrt{7})/2.$$

Ví dụ 4: Đáy là hình vuông

Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải:

1. Tính bán kính đáy ($r_{\text{đáy}}$):

Đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng một nửa đường chéo.

$$\text{Đường chéo } AC = \text{cạnh} \times \sqrt{2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy, } r_{\text{đáy}} = AC/2 = (2a\sqrt{2})/2 = a\sqrt{2}.$$

2. Tính chiều cao (h):

$$h = SA = a.$$

3. Tính bán kính mặt cầu (R):

Áp dụng công thức: $R = \sqrt{r_{\text{đáy}}^2 + (h/2)^2}$

$$R = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a/2)^2} = \sqrt{(2a^2 + a^2/4)} = \sqrt{(9a^2/4)} = 3a/2.$$

IV. Bảng tổng kết công thức bán kính đáy ($r_{\text{đáy}}$)

Để áp dụng nhanh công thức tính R, việc tính $r_{\text{đáy}}$ là bước quan trọng nhất. Dưới đây là bảng tổng hợp công thức tính $r_{\text{đáy}}$ cho các đa giác đáy thường gặp.

Hình dạng đáy	Đặc điểm	Công thức tính $r_{\text{đáy}}$
Tam giác vuông	Vuông tại A, cạnh huyền BC	$r_{\text{đáy}} = BC / 2$
Tam giác đều	Cạnh a	$r_{\text{đáy}} = (a\sqrt{3}) / 3$
Hình vuông	Cạnh a	$r_{\text{đáy}} = (a\sqrt{2}) / 2$
Hình chữ nhật	Cạnh a, b	$r_{\text{đáy}} = (\sqrt{a^2 + b^2}) / 2$

Nắm vững công thức tổng quát $R = \sqrt{(r_{\text{đáy}})^2 + (h/2)^2}$ và cách tính $r_{\text{đáy}}$ cho từng loại đa giác, học sinh có thể giải quyết nhanh chóng và chính xác các bài toán về mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy.