

TỔNG HỢP PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Đây là tài liệu tổng hợp các kiến thức và phương pháp quan trọng nhất để giải quyết các bài toán chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và hai mặt phẳng vuông góc trong chương trình Hình học không gian lớp 11.

I. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Định nghĩa

Một đường thẳng **d** được gọi là vuông góc với mặt phẳng **(P)** nếu **d** vuông góc với mọi đường thẳng **a** nằm trong mặt phẳng **(P)**.

Ký hiệu: **d** $\perp$ **(P)**

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Phương pháp chứng minh)

Đây là định lý quan trọng nhất để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Định lý: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Cấu trúc chứng minh:

1. Chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau **b** và **c** cùng nằm trong mặt phẳng **(P)**.

2. Chứng minh đường thẳng $a \perp b$.

3. Chứng minh đường thẳng $a \perp c$.

4. Kết luận: $a \perp (P)$.

Sơ đồ:

$$a \perp b$$

$$a \perp c$$

$$b, c \subset (P)$$

$$b \cap c = I$$

$$\Rightarrow a \perp (P)$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$).

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

Giải:

a) **Chứng minh $BC \perp (SAB)$**

- Ta có: $BC \perp AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông).
- Ta có: $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$ nên SA vuông góc với mọi đường trong ($ABCD$)).
- AB và SA là hai đường thẳng cắt nhau tại A và cùng nằm trong mặt phẳng (SAB).

- **Kết luận:** Từ hai điều trên, suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$

- Ta có: $BD \perp AC$ (vì ABCD là hình vuông, hai đường chéo vuông góc).
- Ta có: $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
- AC và SA là hai đường thẳng cắt nhau tại A và cùng nằm trong mặt phẳng (SAC).
- **Kết luận:** Từ hai điều trên, suy ra $BD \perp (SAC)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Kẻ AH là đường cao của tam giác SAB ($H \in SB$). Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

Giải:

- Theo giả thiết, ta có: $AH \perp SB$ (1).
- Ta cần chứng minh AH vuông góc với một đường thẳng nữa trong (SBC). Ta sẽ chứng minh $AH \perp BC$.
- Ta có: $BC \perp AB$ (tam giác ABC vuông tại B) và $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$).
- Vì AB và SA cắt nhau tại A và cùng nằm trong (SAB), nên $BC \perp (SAB)$.
- Vì $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$ (2).
- Từ (1) và (2), ta có AH vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau SB và BC trong mặt phẳng (SBC).
- **Kết luận:** $AH \perp (SBC)$.

3. Các tính chất quan trọng

- **Tính chất 1:** Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
 - **Tính chất 2:** Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
 - **Tính chất 3 (Quan hệ song song):**
 - Nếu hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì cũng vuông góc với đường kia ($a // b, (P) \perp a \Rightarrow (P) \perp b$).
 - Nếu hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt này thì cũng vuông góc với mặt kia ($(P) // (Q), a \perp (P) \Rightarrow a \perp (Q)$).
 - Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau ($a \perp (P), b \perp (P), a \neq b \Rightarrow a // b$).
 - **Định lý ba đường vuông góc:** Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P) . Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên (P) . Khi đó, $b \perp a$ khi và chỉ khi $b \perp a'$.
-

II. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Hai mặt phẳng **(P)** và **(Q)** được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Ký hiệu: $(P) \perp (Q)$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc (Phương pháp chứng minh)

Đây là phương pháp phổ biến và hiệu quả nhất để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.

Định lý: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Cấu trúc chứng minh:

1. Tìm một đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) .
2. Chứng minh đường thẳng a đó vuông góc với mặt phẳng (Q) .
3. Kết luận: $(P) \perp (Q)$.

Sơ đồ:

$a \subset (P)$

$a \perp (Q)$

$\Rightarrow (P) \perp (Q)$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.

- a) Chứng minh $(SAB) \perp (ABCD)$.
- b) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.

Giải:

a) **Chứng minh $(SAB) \perp (ABCD)$**

- Ta có đường thẳng SA nằm trong mặt phẳng (SAB).
- Theo giả thiết, ta có $SA \perp (ABCD)$.
- **Kết luận:** Vì mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng SA mà $SA \perp (ABCD)$ nên $(SAB) \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$

- Ta cần tìm một đường thẳng trong (SBC) và chứng minh nó vuông góc với (SAB). Đường thẳng đó là BC.
- Ta có: $BC \subset (SBC)$.
- Chứng minh $BC \perp (SAB)$:
 - $BC \perp AB$ (vì ABCD là hình chữ nhật).
 - $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
 - AB và SA cắt nhau trong (SAB) $\Rightarrow BC \perp (SAB)$.
- **Kết luận:** Vì mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng BC mà $BC \perp (SAB)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$.

3. Các tính chất và hệ quả quan trọng

- **Hệ quả 1:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P) và vuông góc với giao tuyến d của chúng thì cũng vuông góc với mặt phẳng (Q).
- **Hệ quả 2:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Nếu từ một điểm A trong (P), ta dựng đường thẳng vuông góc với (Q) thì đường thẳng đó sẽ nằm trong (P).

- **Hệ quả 3:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

III. Bảng tổng kết phương pháp chứng minh

Nội dung	Chứng minh Đường thẳng $\perp$ Mặt phẳng	C
Mục tiêu	Chứng minh đường thẳng d $\perp$ (P)	C
Phương pháp chính	Chứng minh đường thẳng d vuông góc với HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU a, b nằm trong (P).	C T
Sơ đồ chứng minh	d $\perp$ a, d $\perp$ b a, b $\perp$ (P) a $\perp$ b = I ----- $\perp$ d $\perp$ (P)	
Lưu ý	Nền tảng để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc và các bài toán khoảng cách, góc.	TI th