

Tổng hợp kiến thức: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Đây là một trong những nội dung quan trọng của chương trình Hình học không gian lớp 11, là nền tảng cho các bài toán tính khoảng cách, thể tích và các bài toán hình học phức tạp hơn.

I. Định nghĩa

1. Khái niệm

Góc giữa đường thẳng **d** và mặt phẳng **(P)** được định nghĩa như sau:

- Nếu đường thẳng **d** vuông góc với mặt phẳng **(P)** thì góc giữa chúng bằng **90°** .
- Nếu đường thẳng **d** không vuông góc với mặt phẳng **(P)** thì góc giữa **d** và **(P)** là góc giữa đường thẳng **d** và hình chiếu vuông góc **d'** của nó trên mặt phẳng **(P)**.

Ký hiệu: Góc giữa **d** và **(P)** là $(d, (P))$ hoặc φ .

Chú ý: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn là góc nhọn, có số đo từ **0°** đến **90°** ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$).

II. Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng **d** và mặt phẳng **(P)** (trường hợp **d** không vuông góc với **(P)**), ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1: Tìm giao điểm O.** Xác định giao điểm $O = d \cap (P)$.
- Bước 2: Tìm hình chiếu.** Lấy một điểm **A** bất kỳ trên **d** (khác **O**). Dựng hình chiếu vuông góc **H** của **A** lên mặt phẳng **(P)**. Tức là dựng $AH \perp (P)$ tại **H**.
- Bước 3: Xác định góc.** Nối **O** và **H**. Đường thẳng **OH** chính là hình chiếu **d'** của **d** lên **(P)**. Góc cần tìm là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng **d** và **d'**, chính là góc $\angle AOH$.

Công thức tính: Trong tam giác vuông **AOH** (vuông tại **H**), ta có:

$$\sin(\varphi) = \sin(\angle AOH) = AH / OA$$

$$\cos(\varphi) = \cos(\angle AOH) = OH / OA$$

$$\tan(\varphi) = \tan(\angle AOH) = AH / OH$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp **S.ABCD** có đáy **ABCD** là hình vuông cạnh **a**, **SA** vuông góc với mặt phẳng đáy **(ABCD)** và $SA = a\sqrt{3}$.

- Tính góc giữa đường thẳng **SC** và mặt phẳng **(ABCD)**.
- Tính góc giữa đường thẳng **SB** và mặt phẳng **(ABCD)**.

Giải:

a) Góc giữa **SC và **(ABCD)**:**

- **Bước 1:** Giao điểm của SC và (ABCD) là C.
- **Bước 2:** Vì $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên (ABCD). Do đó, AC là hình chiếu của SC lên (ABCD).
- **Bước 3:** Góc giữa SC và (ABCD) là góc $\angle SCA$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:

$$\tan(\angle SCA) = SA / AC = (a\sqrt{3}) / (a\sqrt{2}) = \sqrt{6} / 2$$

Vậy góc cần tìm là $\arctan(\sqrt{6} / 2)$.

b) Góc giữa SB và (ABCD):

- **Bước 1:** Giao điểm của SB và (ABCD) là B.
- **Bước 2:** A là hình chiếu của S lên (ABCD). Do đó, AB là hình chiếu của SB lên (ABCD).
- **Bước 3:** Góc giữa SB và (ABCD) là góc $\angle SBA$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, ta có:

$$\tan(\angle SBA) = SA / AB = (a\sqrt{3}) / a = \sqrt{3}$$

Vậy góc $\angle SBA = 60^\circ$.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng A'B và mặt phẳng (ABC).

Giải:

- **Bước 1:** Giao điểm của A'B và (ABC) là B.
- **Bước 2:** Vì lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$. Do đó, A là hình chiếu của A' lên (ABC). Suy ra, AB là hình chiếu của A'B lên (ABC).
- **Bước 3:** Góc giữa A'B và (ABC) là góc $\angle A'BA$.

Xét tam giác A'AB vuông tại A, ta có:

$\tan(\angle A'BA) = \frac{AA'}{AB} = \frac{2a}{a} = 2$

Vậy góc cần tìm là $\arctan(2)$.

III. Các trường hợp đặc biệt

Dưới đây là bảng tổng hợp các trường hợp đặc biệt thường gặp:

Trường hợp	Mối quan hệ	Số đo góc	Ví dụ
1	Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)	0°	Góc giữa cạnh AB và mặt phẳng (CDD'C') trong hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.
2	Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P)	0°	Góc giữa đường chéo AC và mặt phẳng đáy (ABCD) trong hình chóp S.ABCD.
3	Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P)	90°	Góc giữa cạnh bên SA và mặt phẳng đáy (ABCD) trong hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$.

IV. Phương pháp tọa độ trong không gian (Oxyz)

Khi bài toán có thể gắn được hệ trục tọa độ Oxyz, việc tính toán góc sẽ trở nên đơn giản hơn. Đây là phương pháp mạnh, thường được sử dụng trong chương trình lớp 12 nhưng học sinh lớp 11 có thể tham khảo để có thêm công cụ giải toán.

Giả sử đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó:

$$\sin(\varphi) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = |\vec{u} \cdot \vec{n}| / (|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|) = |aA + bB + cC| / (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2})$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d có phương trình $(x-1)/2 = y/1 = (z+1)/(-2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tính góc giữa d và (P) .

Giải:

Từ phương trình, ta có:

- Vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; 1; -2)$.
- Vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Áp dụng công thức, ta có:

$$\sin(\varphi) = |2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2)| / (\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2})$$

$$\sin(\varphi) = |2 + 2 + 4| / (\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}) = 8 / (3 \cdot 3) = 8/9$$

Vậy góc cần tìm là $\alpha = \arcsin(8/9)$.

V. Bài tập vận dụng

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh a , góc $\angle BAD = 60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = 3a/4$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải:

- **Giao điểm:** Giao điểm của SB và $(ABCD)$ là B .
- **Hình chiếu:** Vì $SO \perp (ABCD)$ nên O là hình chiếu của S lên $(ABCD)$. Do đó, OB là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$.
- **Góc:** Góc giữa SB và $(ABCD)$ là góc $\angle SBO$.

Xét tam giác ABD có $AB = AD = a$ và $\angle BAD = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều. Suy ra $OB = (1/2)BD = a/2$.

Xét tam giác SOB vuông tại O :

$$\tan(\angle SBO) = SO / OB = (3a/4) / (a/2) = 3/2$$

Vậy góc cần tìm là $\arctan(3/2)$.

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải:

- **Giao điểm:** Giao điểm của $A'C$ và $(ABCD)$ là C .

- **Hình chiếu:** Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của A' lên (ABCD). Do đó, AC là hình chiếu của A'C lên (ABCD).
- **Góc:** Góc giữa A'C và (ABCD) là góc $\angle A'CA$.

Đường chéo đáy AC của hình vuông ABCD là $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác A'AC vuông tại A:

$$\tan(\angle A'CA) = AA' / AC = a / (a\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$$

Vậy góc cần tìm là $\arctan(1/\sqrt{2})$.