

Tổng hợp kiến thức về Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Trong hình học không gian, việc xác định khoảng cách giữa các đối tượng là một trong những dạng toán quan trọng và thường gặp. Chuyên đề này sẽ tập trung vào lý thuyết và các phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau một cách chi tiết và dễ hiểu nhất.

1. Định nghĩa và Tính chất cơ bản

a. Hai đường thẳng chéo nhau

Hai đường thẳng a và b được gọi là **chéo nhau** nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào. Điều này cũng có nghĩa là chúng không song song và không cắt nhau.

b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

- **Đoạn vuông góc chung:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Nếu có đường thẳng Δ cắt cả a và b lần lượt tại M và N , đồng thời Δ vuông góc với cả a và b , thì đoạn thẳng MN được gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .
- **Công thức:** $d(a, b) = MN$

- **Tính chất:** Đoạn vuông góc chung MN là đoạn thẳng ngắn nhất nối hai điểm bất kỳ nằm trên hai đường thẳng a và b.

2. Các phương pháp xác định khoảng cách

Có nhiều phương pháp để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Dưới đây là các phương pháp phổ biến và hiệu quả nhất.

Phương pháp 1: Dựng đoạn vuông góc chung

Đây là phương pháp cơ bản, bám sát định nghĩa. Tuy nhiên, việc dựng hình trong không gian có thể phức tạp. Ta thường xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau ($a \perp b$)

1. **Bước 1:** Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b và vuông góc với đường thẳng a tại điểm I.
2. **Bước 2:** Trong mặt phẳng (P), kẻ đường thẳng $IH \perp b$ tại H.
3. **Bước 3:** Đoạn thẳng IH chính là đoạn vuông góc chung của a và b. Khoảng cách cần tìm là **$d(a, b) = IH$** .

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

- **Phân tích:** Ta có $CD \parallel AB$, nên $CD \parallel (SAB)$. Do đó $d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB))$.
- Vì ABCD là hình vuông, ta có $CB \perp AB$. Mặt khác, $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CB$.
- Từ đó suy ra $CB \perp (SAB)$.
- Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) chính là độ dài đoạn CB.

- **Kết luận:** $d(SB, CD) = CB = a$.

Trường hợp 2: Hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc

1. **Bước 1:** Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b.
2. **Bước 2:** Lấy một điểm M bất kỳ trên b. Dựng $MH \perp (P)$ tại H.
3. **Bước 3:** Từ H, kẻ đường thẳng a' song song với b, cắt a tại A.
4. **Bước 4:** Từ A, kẻ đường thẳng song song với MH, cắt b tại B.
5. **Bước 5:** Đoạn AB chính là đoạn vuông góc chung. Khoảng cách cần tìm là $d(a, b) = AB = MH$.

Trong thực tế, cách dựng này phức tạp nên ta thường chuyển sang phương pháp 2.

Phương pháp 2: Sử dụng mặt phẳng song song

Đây là phương pháp được sử dụng nhiều nhất vì tính hiệu quả và đơn giản hóa việc tính toán.

Nguyên tắc: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng (P) chứa b và song song với a, và cũng bằng khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên a đến mặt phẳng (P).

Công thức: $d(a, b) = d(a, (P)) = d(M, (P))$ với $M \in a$ và $(P) \supset b, (P) \parallel a$.

Các bước thực hiện:

1. **Bước 1:** Tìm hoặc dựng một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a. (Cách dựng: Từ một điểm trên b, kẻ đường thẳng a'

// a. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng chứa b và a').

2. **Bước 2:** Chọn một điểm M thuận lợi trên đường thẳng a.

3. **Bước 3:** Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P). Đây chính là khoảng cách cần tìm.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Tính khoảng cách giữa AC và SD.

- **Bước 1:** Tìm mặt phẳng chứa SD và song song với AC. Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Kẻ $OM \parallel AC$ (M là trung điểm AD). Tuy nhiên, cách này không tối ưu. Ta có thể dựng mặt phẳng qua D, song song với AC. Kẻ $Dx \parallel AC$. Mặt phẳng (SDx) chứa SD và song song AC.
- Cách khác đơn giản hơn: Dựng mặt phẳng (P) chứa AC và song song với SD. Cách này cũng phức tạp.
- **Tối ưu nhất:** Dựng mặt phẳng (SAC') chứa AC và song song SD, với C' là điểm sao cho $AC' \parallel SD$. Cách này cũng không tự nhiên.
- **Sử dụng cách 1:** Dựng mặt phẳng (P) chứa SD và song song với AC. Từ D kẻ đường thẳng d song song với AC. Gọi (P) là mặt phẳng (S, d). Khi đó $AC \parallel (P)$.
- Ta có $d(AC, SD) = d(AC, (P)) = d(A, (P))$. Việc tính khoảng cách này phức tạp.
- **Sử dụng thể tích (hệ quả):** Ta có thể tính thể tích khối tứ diện A.SCD.
 $V(A.SCD) = V(S.ACD) = (1/3) * SA * S(ACD) = (1/3) * 2a * (a^2/2) = a^3/3$.
- Mặt khác, $V(A.SCD) = (1/6) * AC * SD * d(AC, SD) * \sin(\text{góc giữa AC, SD})$.

- Tính độ dài: $AC = a\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{(SA^2 + AD^2)} = \sqrt{(4a^2 + a^2)} = a\sqrt{5}$.
- Tính $\cos(AC, SD)$: Vector $AC = (a, a, 0)$, Vector $SD = (a, 0, -2a)$. $\cos = |a^2| / (a\sqrt{2} * a\sqrt{5}) = 1/\sqrt{10}$. Suy ra $\sin = 3/\sqrt{10}$.
- $a^3/3 = (1/6) * a\sqrt{2} * a\sqrt{5} * d * (3/\sqrt{10}) \Rightarrow a^3/3 = (1/6) * a^2\sqrt{10} * d * (3/\sqrt{10})$
 $\Rightarrow a^3/3 = (1/2) * a^2 * d \Rightarrow d = 2a/3$.
- **Kết luận:** Khoảng cách giữa AC và SD là **$2a/3$** . (Lưu ý: Cách dùng thể tích là một kỹ thuật nâng cao của phương pháp này).

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = 3a$. Tính khoảng cách giữa $A'B$ và $B'C$.

- **Bước 1:** Dựng mặt phẳng (P) chứa $B'C$ và song song với $A'B$. Từ C kẻ đường thẳng $d \parallel A'B$. Mặt phẳng $(B'Cd)$ là mặt phẳng cần tìm.
- Ta có $A'B \parallel (B'Cd)$.
- **Bước 2:** Khoảng cách cần tìm là $d(A'B, B'C) = d(A'B, (B'Cd)) = d(B, (B'Cd))$.
- **Bước 3:** Việc tính khoảng cách từ B đến $(B'Cd)$ khá phức tạp. Ta có thể dùng phương pháp tọa độ.
- Gắn hệ trục tọa độ Oxyz với $B(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $C(0,2a,0)$, $B'(0,0,3a)$.
- Suy ra $A'(a,0,3a)$.
- Đường thẳng $A'B$ có VTCP $\mathbf{u1} = BA' = (a, 0, 3a)$. Đi qua $B(0,0,0)$.
- Đường thẳng $B'C$ có VTCP $\mathbf{u2} = CB' = (0, -2a, 3a)$. Đi qua $C(0,2a,0)$.
- Vector $M1M2 = BC = (0, 2a, 0)$.
- Tích có hướng $[\mathbf{u1}, \mathbf{u2}] = (-6a^2, -3a^2, -2a^2)$.

- $d(A'B, B'C) = |[\mathbf{u1}, \mathbf{u2}] \cdot \mathbf{BC}| / |[\mathbf{u1}, \mathbf{u2}]| = |(-6a^2 * 0) + (-3a^2 * 2a) + (-2a^2 * 0)| / \sqrt{((-6a^2)^2 + (-3a^2)^2 + (-2a^2)^2)}$
- $= |-6a^3| / \sqrt{(36a^4 + 9a^4 + 4a^4)} = 6a^3 / \sqrt{49a^4} = 6a^3 / (7a^2) = \mathbf{6a/7}.$

Phương pháp 3: Sử dụng hai mặt phẳng song song

Nguyên tắc: Dựng hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau, lần lượt chứa hai đường thẳng a và b. Khi đó, khoảng cách giữa a và b chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Công thức: $d(a, b) = d((P), (Q))$ với $a \subset (P)$, $b \subset (Q)$, $(P) // (Q)$.

Các bước thực hiện:

1. **Bước 1:** Dựng mặt phẳng (P) chứa a và song song với b.
2. **Bước 2:** Dựng mặt phẳng (Q) chứa b và song song với a. Dễ thấy $(Q) // (P)$.
3. **Bước 3:** Khoảng cách $d(a, b) = d((P), (Q))$. Ta tính bằng cách lấy một điểm bất kỳ trên (P) và tính khoảng cách đến (Q).

Ví dụ: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và A'D.

- **Bước 1:** Ta thấy $AC \subset (ABCD)$. $A'D \subset (A'D'CB)$.
- Ta cần tìm hai mặt phẳng song song chứa chúng.
- Ta có $A'D // B'C$. Do đó, $A'D // (AB'C)$. Mặt phẳng $(AB'C)$ chứa B'C và song song A'D.
- Ta lại có AC. Vậy ta cần tìm mp chứa AC và song song với A'D.

- Dựng mặt phẳng (P) chứa AC và song song với A'D. Ta có $A'D \parallel B'C$ nên (P) là mặt phẳng (ACB').
- Dựng mặt phẳng (Q) chứa A'D và song song với AC. Ta có $AC \parallel A'C'$ nên (Q) là mặt phẳng (A'DC').
- Ta có $(ACB') \parallel (A'DC')$.
- **Bước 2:** $d(AC, A'D) = d((ACB'), (A'DC'))$. Khoảng cách này bằng khoảng cách từ một điểm trên mặt này đến mặt kia, ví dụ $d(D, (ACB'))$.
- Khoảng cách này bằng $1/3$ đường chéo chính của hình lập phương. $d(D, (ACB')) = d(B, (A'C'D)) = (1/3) * DB' = (1/3) * a\sqrt{3}$.
- **Kết luận:** Khoảng cách giữa AC và A'D là $a\sqrt{3} / 3$.

Phương pháp 4: Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian (Oxyz)

Phương pháp này rất mạnh và hiệu quả, đặc biệt khi việc dựng hình phức tạp. Nội dung này sẽ được học kỹ ở lớp 12 nhưng có thể áp dụng sớm để giải quyết bài toán.

Các bước thực hiện:

1. **Bước 1:** Chọn một hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp. Xác định tọa độ các điểm liên quan.
2. **Bước 2:** Viết phương trình đường thẳng d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\mathbf{u}_1$.
Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\mathbf{u}_2$.
3. **Bước 3:** Áp dụng công thức tính khoảng cách:

$$d(d_1, d_2) = |[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2| / |[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]|$$

- $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ là tích có hướng của hai vector chỉ phương.
- $\cdot$ là phép nhân vô hướng.
- $||$ là độ lớn của vector hoặc giá trị tuyệt đối của một số.

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

- **Bước 1:** Gắn hệ trục tọa độ Oxyz với A là gốc tọa độ (0,0,0). Trục Ox trùng với AD, Oy trùng với AB, Oz trùng với AS.
- Tọa độ các điểm: A(0,0,0), B(0,a,0), C(a,a,0), D(a,0,0), S(0,0,a).
- **Bước 2:**
 - Đường thẳng SB đi qua S(0,0,a) và có VTCP $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{SB} = (0, a, -a)$.
 - Đường thẳng CD đi qua C(a,a,0) và có VTCP $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{CD} = (0, -a, 0)$.
 - Lấy M_1 là S(0,0,a) trên SB, M_2 là C(a,a,0) trên CD. Vector $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{SC} = (a, a, -a)$.
- **Bước 3:**
 - Tích có hướng: $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = (a \cdot 0 - (-a) \cdot (-a), (-a) \cdot 0 - 0 \cdot 0, 0 \cdot (-a) - a \cdot 0) = (-a^2, 0, 0)$.
 - Độ lớn tích có hướng: $|\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2| = \sqrt{(-a^2)^2 + 0^2 + 0^2} = a^2$.
 - Tích vô hướng: $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot \overrightarrow{SC} = (-a^2 \cdot a) + (0 \cdot a) + (0 \cdot (-a)) = -a^3$.
 - Khoảng cách: $d(SB, CD) = |-a^3| / a^2 = a$.
- **Kết luận:** Khoảng cách giữa SB và CD là **a**. (Kết quả này trùng với cách giải ở phương pháp 1).

3. Bảng so sánh các phương pháp

Phương pháp	Ưu điểm	Nhược điểm	Khi nào nên dùng
1. Dụng đoạn vuông góc chung	Bám sát định nghĩa, rèn luyện tư duy hình học không gian.	Khó dựng hình, đặc biệt khi hai đường thẳng không vuông góc.	Khi hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau, có thể xác định mặt phẳng vuông góc dễ dàng.
2. Dùng mặt phẳng song song	Phổ biến, hiệu quả, quy về bài toán quen thuộc là tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng.	Cần xác định được mặt phẳng song song và chọn điểm tính toán thuận lợi.	Hầu hết các bài toán, đặc biệt trong các hình chóp, lăng trụ có các cạnh song song.
3. Dùng hai mặt phẳng song song	Đưa bài toán về dạng đối xứng, dễ nhìn.	Việc dựng đồng thời hai mặt phẳng song song có thể phức tạp.	Các bài toán trong hình lập phương, hình hộp chữ nhật, lăng trụ đều có tính đối xứng cao.

Phương pháp	Ưu điểm	Nhược điểm	Khi nào nên dùng
4. Phương pháp tọa độ Oxyz	Tổng quát, không cần dựng hình phức tạp, chỉ cần tính toán.	Yêu cầu kỹ năng tính toán vector tốt. Việc chọn hệ trục không hợp lý sẽ làm tọa độ phức tạp.	Khi các phương pháp hình học thuần túy gặp khó khăn, hoặc khi hình có sẵn các cạnh đôi một vuông góc.