

Tổng hợp kiến thức: Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Chuyên đề này cung cấp đầy đủ các kiến thức lý thuyết và ví dụ minh họa về mối quan hệ giữa một đường thẳng và một đường tròn trong mặt phẳng.

1. Các vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn tâm O , bán kính R (ký hiệu $(O; R)$) và đường thẳng a . Gọi d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a . Dựa vào số điểm chung của đường thẳng và đường tròn, ta có ba vị trí tương đối.

a. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

- **Định nghĩa:** Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ có 2 điểm chung. Khi đó, ta nói đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng a còn được gọi là cát tuyến của đường tròn.
- **Hệ thức liên hệ: $d < R$**
- **Giải thích:** Khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn bán kính R .
- **Ví dụ 1:** Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và đường thẳng a . Khoảng cách từ O đến a là $d = 3\text{cm}$. Vì $d = 3\text{cm} < R = 5\text{cm}$ nên đường thẳng a cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt.
- **Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(O; 10)$ với $O(0;0)$ và đường thẳng $d: y = 6$. Khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d là $d = |6| =$

6. Vì $d = 6$ $R = 10$ nên đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm.

b. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

- **Định nghĩa:** Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ có 1 điểm chung duy nhất. Điểm chung đó được gọi là tiếp điểm. Khi đó, ta nói đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng a được gọi là tiếp tuyến của đường tròn.
- **Hệ thức liên hệ:** $d = R$
- **Giải thích:** Khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng đúng bán kính R .
- **Ví dụ 1:** Cho đường tròn $(O; 7\text{cm})$ và đường thẳng a . Khoảng cách từ O đến a là $d = 7\text{cm}$. Vì $d = R = 7\text{cm}$ nên đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- **Ví dụ 2:** Cho đường tròn tâm $I(1; 2)$ bán kính $R = 4$ và đường thẳng $d: x = 5$. Khoảng cách từ tâm I đến d là $d = |5 - 1| = 4$. Vì $d = R = 4$ nên đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn.

c. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

- **Định nghĩa:** Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ không có điểm chung nào.
- **Hệ thức liên hệ:** $d > R$
- **Giải thích:** Khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn bán kính R .
- **Ví dụ 1:** Cho đường tròn $(O; 4\text{cm})$ và đường thẳng a . Khoảng cách từ O đến a là $d = 6\text{cm}$. Vì $d = 6\text{cm} > R = 4\text{cm}$ nên đường thẳng a và đường tròn (O) không có điểm chung.

- **Ví dụ 2:** Cho đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 2$ và đường thẳng $d: y = -3$. Khoảng cách từ O đến d là $d = |-3| = 3$. Vì $d = 3 > R = 2$ nên đường thẳng d không giao đường tròn.

2. Bảng tổng kết vị trí tương đối

Bảng dưới đây tóm tắt mối quan hệ giữa vị trí tương đối, số điểm chung và hệ thức giữa d và R .

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng cắt đường tròn	2	$d < R$
Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn	1	$d = R$
Đường thẳng không giao đường tròn	0	$d > R$

3. Tiếp tuyến của đường tròn

Tiếp tuyến là một khái niệm rất quan trọng trong hình học đường tròn.

a. Định nghĩa

Định nghĩa: Một đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của một đường tròn nếu nó chỉ có một điểm chung với đường tròn đó. Điểm chung này được gọi là tiếp điểm.

b. Tính chất của tiếp tuyến

Đây là tính chất cơ bản và quan trọng nhất của tiếp tuyến, được sử dụng để giải quyết rất nhiều bài toán.

- **Định lý:** Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- **Tóm tắt:** Cho đường thẳng a là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại tiếp điểm H . Khi đó, ta có: $a \perp OH$.
- **Ví dụ 1:** Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm trên đường tròn. Kẻ tiếp tuyến d tại A . Góc tạo bởi tiếp tuyến d và bán kính OA là góc nào và có số đo bao nhiêu?
Giải: Theo tính chất tiếp tuyến, $d \perp OA$ tại A . Vậy góc tạo bởi d và OA là góc vuông, có số đo là 90° .
- **Ví dụ 2:** Cho đường tròn $(O; 6\text{cm})$ và điểm M nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 10\text{cm}$. Kẻ tiếp tuyến MA với đường tròn (A là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn thẳng MA .
Giải: Vì MA là tiếp tuyến của (O) tại A nên $MA \perp OA$. Tam giác OAM vuông tại A . Áp dụng định lý Pytago, ta có: $OM^2 = OA^2 + MA^2$. Suy ra: $MA^2 = OM^2 - OA^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$. Vậy $MA = 8\text{cm}$.

c. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến

Để chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn, ta thường dùng một trong hai dấu hiệu sau:

1. **Dấu hiệu 1 (Dựa vào số điểm chung):** Nếu đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn. (Dấu hiệu này dựa trực tiếp vào định nghĩa).

2. **Dấu hiệu 2 (Dựa vào tính chất vuông góc):** Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

• **Tóm tắt Dấu hiệu 2:** Cho đường thẳng a và đường tròn (O) . Nếu a đi qua điểm H thuộc (O) và $a \perp OH$ thì a là tiếp tuyến của (O) tại H .

• **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường tròn tâm B , bán kính BA . Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BA)$.

Giải: Ta có điểm A thuộc đường tròn $(B; BA)$. Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AC \perp AB$. Theo dấu hiệu nhận biết, đường thẳng AC đi qua điểm A của đường tròn (B) và vuông góc với bán kính BA tại A . Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BA)$.

• **Ví dụ 2:** Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB không đi qua tâm. Kẻ $OH \perp AB$ tại H . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OH tại M . Chứng minh MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Giải:

- Xét hai tam giác $\triangle OAM$ và $\triangle OBM$, ta có:

- $OA = OB = R$ (bán kính)

- Cạnh OM chung

- Vì $OH \perp AB$, nên $\triangle OAB$ cân tại O có OH là đường cao cũng là đường trung tuyến và phân giác. Suy ra $\angle AOM = \angle BOM$.

- Do đó, $\triangle OAM = \triangle OBM$ (c.g.c).

- Suy ra $\angle OBM = \angle OAM$.

- Mà MA là tiếp tuyến tại A nên $\angle OAM = 90^\circ$. Vậy $\angle OBM = 90^\circ$ hay $MB \perp OB$.

- Đường thẳng MB đi qua điểm B của đường tròn (O) và vuông góc với bán kính OB tại B. Vậy MB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

4. Bài tập vận dụng tổng hợp

Ví dụ 1

Cho đường tròn (O; 15cm), dây $AB = 24\text{cm}$. Một đường thẳng d song song với AB và cách AB một khoảng 8cm. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).

Giải:

- Kẻ $OH \perp AB$ tại H. Vì $OH \perp AB$ nên H là trung điểm của AB. Do đó, $AH = HB = AB/2 = 24/2 = 12\text{cm}$.
- Xét tam giác vuông OHA, áp dụng định lý Pytago:
 $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$. Suy ra $OH = 9\text{cm}$.
- Đường thẳng d song song với AB và cách AB 8cm. Có hai trường hợp xảy ra:
 - Trường hợp 1:** d và O nằm về hai phía so với AB .
Khoảng cách từ O đến d là $d_1 = OH + 8 = 9 + 8 = 17\text{cm}$.
Vì $d_1 = 17\text{cm} > R = 15\text{cm}$ nên đường thẳng d không giao đường tròn (O).
 - Trường hợp 2:** d và O nằm về cùng một phía so với AB .
Khoảng cách từ O đến d là $d_2 = OH - 8 = 9 - 8 = 1\text{cm}$.
Vì $d_2 = 1\text{cm} < R = 15\text{cm}$ nên đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 2

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của nửa đường tròn lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: $CD = AC + BD$

b) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

Giải:

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

- Tại điểm C: $CA = CM$

- Tại điểm D: $DB = DM$

Do đó, $CD = CM + MD = AC + BD$ (Điều phải chứng minh).

b) Ta có:

- Tiếp tuyến tại A và B vuông góc với đường kính AB, nên $AC \perp AB$ và $BD \perp AB$.

- Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, tia nối từ giao điểm đến tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.

- OC là tia phân giác của góc AOM.

- OD là tia phân giác của góc BOM.

- Mà góc AOM và góc BOM là hai góc kề bù (tổng bằng 180°).

- Do đó, góc COD = góc COM + góc DOM = $\frac{1}{2} * \text{góc AOM} + \frac{1}{2} * \text{góc BOM} = \frac{1}{2} * (\text{góc AOM} + \text{góc BOM}) = \frac{1}{2} * 180^\circ = 90^\circ$.

- Vậy tam giác COD là tam giác vuông tại O (Điều phải chứng minh).