

Tổng hợp kiến thức: Phương trình mặt phẳng và Khoảng cách

Chuyên đề này cung cấp toàn bộ kiến thức nền tảng và các dạng bài tập thường gặp liên quan đến phương trình mặt phẳng và các công thức tính khoảng cách trong hình học không gian Oxyz, giúp học sinh nắm vững lý thuyết và áp dụng hiệu quả vào giải toán.

PHẦN I: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

1. Vecto pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa: Vecto $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ được gọi là vecto pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (P) nếu giá của vecto $\mathbf{n}$ vuông góc với mặt phẳng (P).

- Nếu $\mathbf{n}$ là một VTPT của (P) thì $k\mathbf{n}$ (với $k \neq 0$) cũng là một VTPT của (P). Do đó, một mặt phẳng có vô số VTPT.
- Nếu hai vecto $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P) thì VTPT của (P) là $\mathbf{n} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (tích có hướng của $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$).

Ví dụ 1: Cho mặt phẳng (P) và hai vecto không cùng phương $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$ có giá song song với (P). Tìm một VTPT của (P).

Giải: VTPT của (P) là $\mathbf{n} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (-2, 1, 1)$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận vecto $\mathbf{n} = (A, B, C)$ làm VTPT có phương trình là:

Công thức: $\mathbf{A}(x - x_0) + \mathbf{B}(y - y_0) + \mathbf{C}(z - z_0) = 0$

Khai triển phương trình trên, ta được dạng tổng quát:

Công thức: $\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$ (với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Ví dụ 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1, -2, 3)$ và có VTPT $\mathbf{n} = (2, 1, -4)$.

Giải: Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2(x - 1) + 1(y - (-2)) - 4(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 + y + 2 - 4z + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4z + 12 = 0$.

Ví dụ 2: Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$.

Giải:

1. Ta có hai vecto nằm trên mặt phẳng (ABC) là $\mathbf{AB} = (-1, 2, 0)$ và $\mathbf{AC} = (-1, 0, 3)$.
2. VTPT của mặt phẳng (ABC) là $\mathbf{n} = [\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] = (6, 3, 2)$.
3. Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(1, 0, 0)$ và có VTPT $\mathbf{n} = (6, 3, 2)$ nên có phương trình: $6(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

3. Các trường hợp đặc biệt của mặt phẳng

Xét mặt phẳng (P): $\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$

Trường hợp	Phương trình	Đặc điểm
(P) đi qua gốc tọa độ $O(0,0,0)$	$D = 0$ ($Ax + By + Cz = 0$)	Khuyết hệ số tự do D.
(P) song song hoặc chứa trục Ox	$A = 0$ ($By + Cz + D = 0$)	Khuyết biến x.
(P) song song hoặc chứa trục Oy	$B = 0$ ($Ax + Cz + D = 0$)	Khuyết biến y.
(P) song song hoặc chứa trục Oz	$C = 0$ ($Ax + By + D = 0$)	Khuyết biến z.
(P) song song với mặt phẳng (Oxy)	$A = B = 0$ ($Cz + D = 0$)	Phương trình có dạng $z = m$.
(P) song song với mặt phẳng (Oxz)	$A = C = 0$ ($By + D = 0$)	Phương trình có dạng $y = m$.
(P) song song với mặt phẳng (Oyz)	$B = C = 0$ ($Ax + D = 0$)	Phương trình có dạng $x = m$.

4. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Nếu mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ với $a, b, c \neq 0$ thì phương trình của (P) là:

Công thức: $x/a + y/b + z/c = 1$

Ví dụ: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua các điểm M(2, 0, 0), N(0, -1, 0), K(0, 0, 3).

Giải: Mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm có hoành độ $a = 2$, tung độ $b = -1$, cao độ $c = 3$. Áp dụng công thức phương trình đoạn chắn, ta có:
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-1)} + \frac{z}{3} = 1.$$

PHẦN II: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

- **(P) cắt (Q):** Khi tỉ số các hệ số không bằng nhau. Cụ thể là bộ $(A_1:B_1:C_1)$ khác bộ $(A_2:B_2:C_2)$.
- **(P) song song (Q):** Khi $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
- **(P) trùng (Q):** Khi $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- **(P) vuông góc (Q):** Khi $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Ví dụ: Xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng (P): $x - 2y + z + 1 = 0$ và (Q): $2x - 4y + 2z + 5 = 0$.

Giải: Ta có tỉ lệ các hệ số: $\frac{1}{2} = \frac{(-2)}{(-4)} = \frac{1}{2}$. Tỉ lệ hệ số tự do: $\frac{1}{5}$. Vì $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$ nên (P) song song với (Q).

2. Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là góc φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) được tính bằng góc giữa hai VTPT $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ và $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Công thức: $\cos(\varphi) = |\cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)| = |\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2| / (\sqrt{(\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{B}_1^2 + \mathbf{C}_1^2)} * \sqrt{(\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{B}_2^2 + \mathbf{C}_2^2)})$

Ví dụ: Tính góc giữa hai mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 1 = 0$ và (Q): $2x - y - z + 5 = 0$.

Giải:

- VTPT của (P) là $\mathbf{n}_1 = (1, 2, -1)$.
- VTPT của (Q) là $\mathbf{n}_2 = (2, -1, -1)$.
- $\cos(\varphi) = |1*2 + 2*(-1) + (-1)*(-1)| / (\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} * \sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}) = |2 - 2 + 1| / (\sqrt{6} * \sqrt{6}) = 1/6$.
- Vậy $\varphi = \arccos(1/6)$.

PHẦN III: KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức:

Công thức: $d(M_0, (P)) = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

Ví dụ 1: Tính khoảng cách từ điểm $M(1, -2, 1)$ đến mặt phẳng (P): $2x - 2y + z - 3 = 0$.

Giải: Áp dụng công thức, ta có: $d(M, (P)) = |2*1 - 2*(-2) + 1*1 - 3| / \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = |2 + 4 + 1 - 3| / \sqrt{9} = 4/3$.

Ví dụ 2: Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

Giải: Gốc tọa độ O có tọa độ (0, 0, 0). Khoảng cách là: $d(O, (P)) = |1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6| / \sqrt{(1^2 + 2^2 + (-2)^2)} = |6| / \sqrt{9} = 6/3 = 2$.

2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P): $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ và (Q): $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, ta có hai cách:

- **Cách 1:** Lấy một điểm M bất kỳ thuộc mặt phẳng (P), sau đó tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q). $d((P), (Q)) = d(M, (Q))$.
- **Cách 2:** Áp dụng công thức tính nhanh.

Công thức: $d((P), (Q)) = |D_1 - D_2| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

Lưu ý: Công thức này chỉ áp dụng khi hệ số A, B, C của hai phương trình mặt phẳng giống hệt nhau.

Ví dụ: Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và (Q): $x - 2y + 2z - 5 = 0$.

Giải: Hai mặt phẳng đã có cùng hệ số A, B, C. Áp dụng công thức, ta có: $d((P), (Q)) = |3 - (-5)| / \sqrt{(1^2 + (-2)^2 + 2^2)} = |8| / \sqrt{9} = 8/3$.