

Chuyên đề: Hàm số bậc nhất và ứng dụng vào bài toán tính cước phí taxi

Hàm số bậc nhất không chỉ là một khái niệm toán học trừu tượng mà còn có rất nhiều ứng dụng trong đời sống hàng ngày. Một trong những ứng dụng thú vị và gần gũi nhất chính là bài toán tính cước phí taxi. Chuyên đề này sẽ giúp các em nắm vững kiến thức lý thuyết và vận dụng để giải quyết các bài toán thực tế một cách dễ dàng.

I. Kiến thức cơ bản về hàm số bậc nhất

1. Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức:

$$y = ax + b$$

Trong đó:

- **a, b** là các số cho trước và **a** $\neq$ 0.
- **x** là biến số.
- **y** là giá trị của hàm số tại x.
- **a** được gọi là hệ số góc.
- **b** được gọi là tung độ gốc.

Ví dụ 1: Hàm số $y = 3x - 5$ là một hàm số bậc nhất với $a = 3$ và $b = -5$.

Ví dụ 2: Hàm số $y = -0.5x$ là một hàm số bậc nhất với $a = -0.5$ và $b = 0$.

Lưu ý: Hàm số $y = 0x + 2$ (tức $y = 2$) không phải là hàm số bậc nhất vì $a = 0$.

Hàm số $y = x^2 + 1$ cũng không phải hàm số bậc nhất vì biến x có số mũ là 2.

2. Tính chất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có các tính chất sau:

- **Đồng biến trên $\mathbb{R}$:** Khi hệ số **$a > 0$** . Điều này có nghĩa là khi giá trị của biến x tăng lên thì giá trị tương ứng của y cũng tăng lên.
- **Nghịch biến trên $\mathbb{R}$:** Khi hệ số **$a < 0$** . Điều này có nghĩa là khi giá trị của biến x tăng lên thì giá trị tương ứng của y lại giảm đi.

Ví dụ 1 (Đồng biến): Hàm số $y = 2x + 1$ có $a = 2 > 0$ nên hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi $x_1 = 1, y_1 = 3$. Khi $x_2 = 2, y_2 = 5$. Ta thấy $x_1 < x_2$ thì $y_1 < y_2$.

Ví dụ 2 (Nghịch biến): Hàm số $y = -3x + 4$ có $a = -3 < 0$ nên hàm số này nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Khi $x_1 = 1, y_1 = 1$. Khi $x_2 = 2, y_2 = -2$. Ta thấy $x_1 < x_2$ nhưng $y_1 > y_2$.

3. Đồ thị của hàm số bậc nhất

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng.

- Cắt trục tung (Oy) tại điểm có tung độ bằng b .
- Cắt trục hoành (Ox) tại điểm có hoành độ bằng $-b/a$.

Cách vẽ đồ thị: Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$, ta chỉ cần xác định tọa độ của hai điểm bất kỳ thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 4$.

1. **Tìm giao điểm với trục Oy:** Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - 4 = -4$. Ta có điểm $A(0; -4)$.
2. **Tìm giao điểm với trục Ox:** Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$. Ta có điểm $B(2; 0)$.
3. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B, ta được đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$.

II. Ứng dụng vào bài toán tính cước phí taxi

1. Phân tích cấu trúc giá cước taxi

Giá cước taxi thường không phải là một con số cố định cho mỗi km mà được tính theo các mức khác nhau, tạo thành một hàm số dạng "bậc thang". Cấu trúc phổ biến bao gồm:

- **Giá mở cửa:** Một khoản phí cố định cho một quãng đường rất ngắn đầu tiên (ví dụ: 10.000 VNĐ cho 0.5 km đầu).
- **Giá cước cho các km tiếp theo:** Một đơn giá khác cho một khoảng quãng đường tiếp theo (ví dụ: 13.000 VNĐ/km cho từ trên 0.5 km đến 30 km).
- **Giá cước cho các km sau đó:** Một đơn giá rẻ hơn cho quãng đường dài (ví dụ: 11.000 VNĐ/km cho từ km thứ 31 trở đi).

Bảng giá cước ví dụ của hãng taxi A:

Loại quãng đường	Đơn giá (VNĐ)
Giá mở cửa (cho 0.6 km đầu tiên)	10.000
Từ trên 0.6 km đến 25 km	14.000 / km
Từ km thứ 26 trở đi	12.000 / km

2. Xây dựng hàm số biểu thị tổng tiền cước

Gọi x là số km di chuyển ($x > 0$) và y là tổng số tiền phải trả (VNĐ). Dựa vào bảng giá trên, ta có thể xây dựng hàm số y theo x .

• Trường hợp 1: Nếu $0 < x \leq 0.6$ (Đi trong quãng đường mở cửa)

Số tiền phải trả là giá mở cửa.

$$y = 10.000$$

Đây là một hàm hằng.

• Trường hợp 2: Nếu $0.6 < x \leq 25$

Số tiền phải trả bao gồm: tiền giá mở cửa cho 0.6 km đầu và tiền cho quãng đường còn lại $(x - 0.6)$ km.

$$y = (\text{Tiền giá mở cửa}) + (\text{Đơn giá mức 2}) \times (\text{Số km ở mức 2})$$

$$y = 10.000 + 14.000 \times (x - 0.6)$$

$$y = 10.000 + 14.000x - 8.400$$

$$y = 14.000x + 1.600$$

Đây là một hàm số bậc nhất với $a = 14.000$ và $b = 1.600$.

• Trường hợp 3: Nếu $x > 25$

Số tiền phải trả bao gồm: tiền giá mở cửa, tiền cho quãng đường từ 0.6 km

đến 25 km, và tiền cho quãng đường từ km thứ 26 trở đi.

Số km đi ở mức giá 2 là: $25 - 0.6 = 24.4$ km.

Số km đi ở mức giá 3 là: $x - 25$ km.

$y = (\text{Tiền } 0.6 \text{ km đầu}) + (\text{Tiền cho } 24.4 \text{ km tiếp theo}) + (\text{Tiền cho các km còn lại})$

$$y = 10.000 + 14.000 \times (24.4) + 12.000 \times (x - 25)$$

$$y = 10.000 + 341.600 + 12.000x - 300.000$$

$$\mathbf{y = 12.000x + 51.600}$$

Đây là một hàm số bậc nhất với $a = 12.000$ và $b = 51.600$.

III. Các dạng bài tập và ví dụ minh họa

Sử dụng bảng giá của hãng taxi A ở trên để giải các bài toán sau.

Dạng 1: Tính tiền cước khi biết quãng đường

Phương pháp: Xác định quãng đường di chuyển (x) thuộc trường hợp nào để áp dụng đúng công thức hàm số tương ứng.

Ví dụ 1: Một hành khách đi quãng đường 15 km. Hỏi người đó phải trả bao nhiêu tiền?

Giải:

Ta có $x = 15$ km. Vì $0.6 \leq 15 \leq 25$ nên ta áp dụng công thức của Trường hợp 2:

$$y = 14.000x + 1.600$$

Thay $x = 15$ vào công thức:

$$y = 14.000 \times 15 + 1.600 = 210.000 + 1.600 = 211.600 \text{ (VNĐ)}.$$

Vậy, hành khách phải trả 211.600 VNĐ.

Ví dụ 2: Một gia đình đi du lịch và di chuyển bằng taxi A một quãng đường 40 km. Tính số tiền cước họ phải trả.

Giải:

Ta có $x = 40$ km. Vì $40 > 25$ nên ta áp dụng công thức của Trường hợp 3:

$$y = 12.000x + 51.600$$

Thay $x = 40$ vào công thức:

$$y = 12.000 \times 40 + 51.600 = 480.000 + 51.600 = 531.600 \text{ (VNĐ)}.$$

Vậy, gia đình đó phải trả 531.600 VNĐ.

Dạng 2: Tính quãng đường khi biết số tiền

Phương pháp: Dựa vào số tiền (y) để xác định xem quãng đường nằm trong khoảng nào, từ đó giải phương trình tìm x .

Ví dụ 1: Chị An đi taxi A và phải trả tổng cộng 85.600 VNĐ. Hỏi chị An đã đi quãng đường bao nhiêu km?

Giải:

Ta cần xác định quãng đường x thuộc trường hợp nào.

- Nếu đi theo mức giá 1 ($0 \leq x \leq 0.6$), số tiền là 10.000 VNĐ. Vì $85.600 > 10.000$ nên không phải trường hợp này.

- Tính số tiền tối đa của mức giá 2 (khi đi đúng 25 km):

$$y = 14.000 \times 25 + 1.600 = 351.600 \text{ VNĐ}.$$

- Ta thấy $10.000 < 85.600 < 351.600$. Vậy quãng đường chị An đi thuộc Trường hợp 2 ($0.6 \leq x \leq 25$).

Ta có phương trình:

$$85.600 = 14.000x + 1.600$$

$$14.000x = 85.600 - 1.600$$

$$14.000x = 84.000$$

$$x = 84.000 / 14.000 = 6 \text{ (km)}.$$

Vì $x = 6$ thỏa mãn điều kiện $0.6 \leq 25$ nên kết quả hợp lệ.

Vậy, chị An đã đi quãng đường 6 km.

Dạng 3: So sánh giá cước giữa hai hãng taxi

Phương pháp: Xây dựng các hàm số biểu thị giá cước cho cả hai hãng. Sau đó, so sánh giá trị của các hàm số này trên các khoảng quãng đường khác nhau.

Ví dụ: Hãng taxi B có bảng giá như sau:

- Giá mở cửa: 11.000 VNĐ cho 0.8 km đầu.
- Từ trên 0.8 km đến 30 km: 13.000 VNĐ/km.
- Từ km thứ 31 trở đi: 11.500 VNĐ/km.

Hỏi nếu đi quãng đường 35 km thì nên chọn hãng A hay hãng B để tiết kiệm chi phí hơn?

Giải:

Ta cần tính chi phí cho quãng đường 35 km của cả hai hãng.

*** Đối với hãng A ($x = 35$ km):**

Vì $35 > 25$, ta dùng công thức Trường hợp 3 của hãng A:

$$y_A = 12.000x + 51.600$$

$$y_A = 12.000 \times 35 + 51.600 = 420.000 + 51.600 = 471.600 \text{ (VNĐ)}.$$

*** Đối với hãng B ($x = 35$ km):**

Trước hết, ta xây dựng hàm số cho hãng B khi $x > 30$.

$y_B = (\text{Tiền } 0.8 \text{ km đầu}) + (\text{Tiền cho quãng đường từ } 0.8 \text{ km đến } 30 \text{ km}) +$
(Tiền cho các km còn lại)

Số km ở mức 2: $30 - 0.8 = 29.2 \text{ km}$.

Số km ở mức 3: $35 - 30 = 5 \text{ km}$.

$y_B = 11.000 + 13.000 \times (29.2) + 11.500 \times (35 - 30)$

$y_B = 11.000 + 379.600 + 11.500 \times 5$

$y_B = 390.600 + 57.500 = 448.100 \text{ (VNĐ)}$.

*** So sánh:**

Ta thấy $y_A = 471.600 \text{ VNĐ}$ và $y_B = 448.100 \text{ VNĐ}$.

Vì $448.100 < 471.600$, đi hãng B sẽ rẻ hơn.

Vậy, nếu đi quãng đường 35 km, nên chọn hãng B để tiết kiệm chi phí.