

Tổng hợp kiến thức về Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

I. Lý thuyết cơ bản

1.1. Định nghĩa

Một mặt cầu được gọi là **ngoại tiếp** một khối đa diện nếu tất cả các đỉnh của khối đa diện đó đều nằm trên mặt cầu. Khối đa diện trong trường hợp này được gọi là **nội tiếp** mặt cầu.

- Tâm của mặt cầu ngoại tiếp (ký hiệu là **I**) là điểm cách đều tất cả các đỉnh của khối đa diện.
- Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp (ký hiệu là **R**) là khoảng cách từ tâm I đến một đỉnh bất kỳ của khối đa diện.

1.2. Điều kiện tồn tại

Một khối chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đa giác đáy của khối chóp đó là một đa giác nội tiếp được một đường tròn.

Lưu ý: Mọi tam giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân, đa giác đều đều là các đa giác nội tiếp được đường tròn.

II. Phương pháp xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

2.1. Phương pháp tổng quát

Để xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.A_1A_2...A_n$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1:** Xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2...A_n$.
- Bước 2:** Dựng trục Δ của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Trục Δ là đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy. Mọi điểm nằm trên Δ đều cách đều các đỉnh của đa giác đáy. Do đó, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp phải nằm trên Δ .
- Bước 3:** Trong mặt phẳng xác định bởi trục Δ và đỉnh S , dựng đường trung trực d của cạnh bên SA_1 .
- Bước 4:** Giao điểm của d và Δ chính là tâm I của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

Bán kính R chính là khoảng cách từ I đến một đỉnh bất kỳ (ví dụ: $R = IS = IA_1$).

III. Các dạng toán thường gặp

3.1. Dạng 1: Khối chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy

Xét khối chóp có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

a. Cách xác định tâm và bán kính

- **Tâm I:** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Dựng trục Δ của đáy. Trong mặt phẳng (SA, Δ) , dựng đường trung trực của SA cắt Δ tại I. I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

- **Công thức tính bán kính:**

$$R = \sqrt{(r_{\text{đáy}})^2 + (h/2)^2}$$

Trong đó:

- **R** là bán kính mặt cầu ngoại tiếp.
- **$r_{\text{đáy}}$** là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- **h** là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy ($h = SA$).

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = 4$. Đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = 3$, $BC = \sqrt{7}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải:

1. Đáy ABC là tam giác vuông tại B nên tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là trung điểm O của cạnh huyền AC.
2. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $r_{\text{đáy}}$:
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4.$$
$$r_{\text{đáy}} = AC / 2 = 4 / 2 = 2.$$
3. Chiều cao $h = SA = 4$.

4. Áp dụng công thức, bán kính mặt cầu ngoại tiếp là:

$$R = \sqrt{(r_{\text{đáy}})^2 + (SA/2)^2} = \sqrt{(2^2 + (4/2)^2)} = \sqrt{(4 + 2^2)} = \sqrt{(4 + 4)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải:

1. Đáy ABCD là hình vuông cạnh a nên đường chéo $AC = a\sqrt{2}$.

2. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r_{\text{đáy}} = AC / 2 = (a\sqrt{2}) / 2$.

3. Chiều cao $h = SA = a\sqrt{2}$.

4. Áp dụng công thức, bán kính mặt cầu ngoại tiếp là:

$$R = \sqrt{(r_{\text{đáy}})^2 + (SA/2)^2} = \sqrt{((a\sqrt{2})/2)^2 + ((a\sqrt{2})/2)^2} = \sqrt{(2a^2/4 + 2a^2/4)} = \sqrt{(a^2)} = a.$$

3.2. Dạng 2: Khối chóp đều

Khối chóp đều là khối chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

a. Cách xác định tâm và bán kính

- **Tâm I:** Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đều nằm trên đường cao SH của nó (với H là tâm đáy).

- **Công thức tính bán kính:**

$$R = (\text{cạnh bên})^2 / (2 * \text{chiều cao}) = SB^2 / (2 * SH)$$

Trong đó:

- **R** là bán kính mặt cầu ngoại tiếp.
- **SB** là độ dài một cạnh bên bất kỳ.
- **SH** là độ dài đường cao của khối chóp.

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp.

Giải:

1. Gọi H là tâm của tam giác đều ABC. H cũng là chân đường cao.
2. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r_{\text{đáy}} = AH = (a\sqrt{3}/2) * (2/3) = a\sqrt{3}/3$.

3. Tính chiều cao SH trong tam giác vuông SAH:

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3}/3)^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2/9} = \sqrt{(33a^2/9)} = (a\sqrt{33})/3.$$

4. Áp dụng công thức:

$$R = SA^2 / (2 * SH) = (2a)^2 / (2 * (a\sqrt{33})/3) = 4a^2 / ((2a\sqrt{33})/3) = (6a) / \sqrt{33} = (2a\sqrt{33}) / 11.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp.

Giải:

1. Gọi H là tâm hình vuông ABCD.
2. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r_{\text{đáy}} = AH = (a\sqrt{2})/2$.

3. Tính chiều cao SH trong tam giác vuông SAH:

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - ((a\sqrt{2})/2)^2} = \sqrt{a^2 - 2a^2/4} = \sqrt{a^2/2} = (a\sqrt{2})/2.$$

4. Áp dụng công thức:

$$R = SA^2 / (2 * SH) = a^2 / (2 * (a\sqrt{2})/2) = a^2 / (a\sqrt{2}) = a / \sqrt{2} = (a\sqrt{2})/2.$$

3.3. Dạng 3: Khối chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy

Xét khối chóp có một mặt bên (ví dụ mặt (SAB)) vuông góc với mặt phẳng đáy.

a. Cách xác định tâm và bán kính

Phương pháp chung là dựng trục của đường tròn ngoại tiếp đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp mặt bên vuông góc với đáy. Giao điểm của hai trục này là tâm mặt cầu ngoại tiếp. Ta có công thức tính nhanh như sau:

$$R = \sqrt{(r_{\text{bên}}^2 + r_{\text{đáy}}^2 - (g/2)^2)}$$

Trong đó:

- **R** là bán kính mặt cầu ngoại tiếp.
- **$r_{\text{bên}}$** là bán kính đường tròn ngoại tiếp mặt bên vuông góc với đáy (ví dụ: mặt SAB).
- **$r_{\text{đáy}}$** là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- **g** là độ dài cạnh giao tuyến của mặt bên và mặt đáy (ví dụ: cạnh AB).

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải:

- 1. Đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r_{\text{đáy}} = (a\sqrt{2})/2$.
- 2. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là $r_{\text{bên}} = (a\sqrt{3})/3$.
- 3. Giao tuyến của mặt bên và mặt đáy là cạnh AB, có độ dài $g = a$.
- 4. Áp dụng công thức:
$$R^2 = r_{\text{bên}}^2 + r_{\text{đáy}}^2 - (g/2)^2$$
$$R^2 = ((a\sqrt{3})/3)^2 + ((a\sqrt{2})/2)^2 - (a/2)^2$$
$$R^2 = (3a^2/9) + (2a^2/4) - (a^2/4) = a^2/3 + a^2/4 = (4a^2 + 3a^2)/12 = 7a^2/12.$$
$$R = \sqrt{(7a^2/12)} = (a\sqrt{7}) / (2\sqrt{3}) = (a\sqrt{21})/6.$$

IV. Bảng tổng hợp công thức

Dạng khối chóp	Đặc điểm	Công thức bán kính R
Cạnh bên vuông góc với đáy	$SA \perp \text{Đáy}$, $h = SA$	$R = \sqrt{(r_{\text{đáy}}^2 + (h/2)^2)}$
Khối chóp đều	Đáy là đa giác đều, chân đường cao là tâm đáy.	$R = (\text{cạnh bên})^2 / (2 * \text{chiều cao})$
Mặt bên vuông góc với đáy	$(SAB) \perp \text{Đáy}$, g là giao tuyến AB.	$R = \sqrt{(r_{\text{bên}}^2 + r_{\text{đáy}}^2 - (g/2)^2)}$