

Tổng hợp công thức Lượng giác và giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

Đây là tài liệu hệ thống hóa toàn bộ kiến thức quan trọng về lượng giác trong chương trình Toán lớp 10, giúp các em học sinh dễ dàng tra cứu và ôn tập.

Phần 1: Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

Việc ghi nhớ giá trị lượng giác của các cung (góc) đặc biệt là vô cùng quan trọng để giải nhanh các bài tập tính toán và rút gọn biểu thức.

Độ (°)	Radian (rad)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	0	1	0	Không xác định
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	Không xác định	0
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
150°	$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	Không xác định

Ví dụ minh họa:

- Ví dụ 1:** Tính giá trị biểu thức $A = \sin(30^\circ) + \cos(60^\circ)$.
Giải: Dựa vào bảng, ta có $\sin(30^\circ) = 1/2$ và $\cos(60^\circ) = 1/2$. Vậy $A = 1/2 + 1/2 = 1$.
- Ví dụ 2:** Tính giá trị biểu thức $B = \tan(45^\circ) + \cot(135^\circ)$.
Giải: Dựa vào bảng, ta có $\tan(45^\circ) = 1$ và $\cot(135^\circ) = -1$. Vậy $B = 1 + (-1) = 0$.

Phần 2: Các công thức lượng giác cơ bản và cung liên quan

1. Các hệ thức lượng giác cơ bản

Đây là những công thức nền tảng liên kết các giá trị sin, cos, tan, cot của cùng một cung α .

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$ (với $\cos\alpha \neq 0$)
- $1 + \cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$ (với $\sin\alpha \neq 0$)
- $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ (với $\sin\alpha \neq 0$ và $\cos\alpha \neq 0$)

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho $\sin\alpha = 3/5$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos\alpha$.

Giải: Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (3/5)^2 = 16/25$. Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (góc phần tư thứ II) nên $\cos\alpha < 0$. Vậy $\cos\alpha = -4/5$.

- **Ví dụ 2:** Cho $\tan\alpha = -2$. Tính các giá trị lượng giác còn lại.

Giải: Ta có $\cot\alpha = 1/\tan\alpha = -1/2$.

Lại có $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha \Rightarrow 1 + (-2)^2 = 1/\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1/5$.

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 4/5$.

Do không biết dấu của α , ta có hai trường hợp: $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = -2/\sqrt{5}$ hoặc $\cos\alpha = -1/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$.

2. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

Mẹo ghi nhớ: "Cos-đối, Sin-bù, Phụ-chéo, hơn kém Pi Tan-Cot".

a. Cung đối nhau (α và $-\alpha$)

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

Ví dụ: $\cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = 1/2$; $\sin(-30^\circ) = -\sin(30^\circ) = -1/2$.

b. Cung bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

Ví dụ: $\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$.

c. Cung phụ nhau (α và $\pi/2 - \alpha$)

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha$
- $\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan\alpha$

Ví dụ: $\sin(30^\circ) = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos(60^\circ)$.

d. Cung hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
- $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

Ví dụ: $\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan(45^\circ) = 1$.

Phần 3: Công thức cộng

Công thức cộng dùng để tính giá trị lượng giác của tổng hoặc hiệu hai cung khi biết giá trị lượng giác của từng cung.

- $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
- $\tan(a + b) = (\tan a + \tan b) / (1 - \tan a \cdot \tan b)$
- $\tan(a - b) = (\tan a - \tan b) / (1 + \tan a \cdot \tan b)$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính $\cos(15^\circ)$.

Giải: Ta viết $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$.

$$\begin{aligned}\cos(15^\circ) &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + \\ &(\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4.\end{aligned}$$

- **Ví dụ 2:** Tính $\sin(75^\circ)$.

Giải: Ta viết $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

$$\sin(75^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4.$$

Phần 4: Công thức nhân đôi, hạ bậc

1. Công thức nhân đôi

Đây là trường hợp đặc biệt của công thức cộng khi $a = b$.

- $\sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\tan(2a) = (2\tan a) / (1 - \tan^2 a)$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho $\sin a = 4/5$ với $0 < a < \pi/2$. Tính $\sin(2a)$.

Giải: Vì $0 < a < \pi/2$ nên $\cos a > 0$. Ta có $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - (4/5)^2 = 9/25 \Rightarrow \cos a = 3/5$.

Vậy $\sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a = 2 * (4/5) * (3/5) = 24/25$.

- **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $P = \cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x)$.

Giải: Nhân và chia với $\sin x$ (với $\sin x \neq 0$):

$$\begin{aligned} P &= (\sin x \cdot \cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x)) / \sin x \\ &= (1/2 * \sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x)) / \sin x \\ &= (1/4 * \sin(4x) \cdot \cos(4x)) / \sin x \\ &= (1/8 * \sin(8x)) / \sin x = \sin(8x) / (8\sin x). \end{aligned}$$

2. Công thức hạ bậc

Công thức hạ bậc được suy ra từ công thức nhân đôi của $\cos(2a)$, dùng để giảm bậc của các biểu thức lượng giác.

- $\cos^2 a = (1 + \cos(2a)) / 2$
- $\sin^2 a = (1 - \cos(2a)) / 2$
- $\tan^2 a = (1 - \cos(2a)) / (1 + \cos(2a))$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\sin^2(15^\circ)$.

Giải: Áp dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2(15^\circ) = (1 - \cos(2 \cdot 15^\circ)) / 2 = (1 - \cos(30^\circ)) / 2 = (1 - \sqrt{3}/2) / 2 = (2 - \sqrt{3}) / 4.$$

- **Ví dụ 2:** Biến đổi biểu thức $A = \cos^4 x$ thành tổng các cosin với bậc 1.

$$\begin{aligned} \text{Giải: } A &= (\cos^2 x)^2 = [(1 + \cos(2x))/2]^2 = (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x))/4 \\ &= 1/4 * [1 + 2\cos(2x) + (1 + \cos(4x))/2] \\ &= 1/4 * [3/2 + 2\cos(2x) + 1/2 * \cos(4x)] \\ &= 3/8 + 1/2 * \cos(2x) + 1/8 * \cos(4x). \end{aligned}$$

Phần 5: Công thức biến đổi tích thành tổng

Các công thức này giúp chuyển một tích các giá trị lượng giác thành một tổng hoặc hiệu.

- $\cos a \cdot \cos b = 1/2 [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
- $\sin a \cdot \sin b = 1/2 [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Biến đổi tích $P = \cos(5x) \cdot \cos(3x)$ thành tổng.

Giải: Áp dụng công thức, ta có:

$$P = \frac{1}{2} [\cos(5x - 3x) + \cos(5x + 3x)] = \frac{1}{2} [\cos(2x) + \cos(8x)].$$

- **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $A = 2\sin(2x)\sin(4x) + \cos(6x)$.

Giải: Ta có $2\sin(2x)\sin(4x) = 2 * \frac{1}{2} [\cos(4x - 2x) - \cos(4x + 2x)] = \cos(2x) - \cos(6x)$.

Vậy $A = \cos(2x) - \cos(6x) + \cos(6x) = \cos(2x)$.

Phần 6: Công thức biến đổi tổng thành tích

Ngược lại với phần 5, các công thức này giúp chuyển một tổng hoặc hiệu các giá trị lượng giác thành một tích.

- $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

- $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

- $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

- $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Rút gọn biểu thức $A = \sin(7a) - \sin(5a)$.

Giải: Áp dụng công thức, ta có:

$$A = 2\cos\left(\frac{7a+5a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{7a-5a}{2}\right) = 2\cos(6a) \cdot \sin(a).$$

- **Ví dụ 2:** Chứng minh rằng trong tam giác ABC, $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)$.

Giải: Ta có $A + B + C = \pi$.

$$VT = (\sin A + \sin B) + \sin C = 2\sin((A+B)/2)\cos((A-B)/2) + 2\sin(C/2)\cos(C/2).$$

$$\text{Vì } (A+B)/2 = \pi/2 - C/2 \text{ nên } \sin((A+B)/2) = \cos(C/2).$$

$$VT = 2\cos(C/2)\cos((A-B)/2) + 2\sin(C/2)\cos(C/2) = 2\cos(C/2) [\cos((A-B)/2) + \sin(C/2)].$$

$$\text{Mà } \sin(C/2) = \sin(\pi/2 - (A+B)/2) = \cos((A+B)/2).$$

$$VT = 2\cos(C/2) [\cos((A-B)/2) + \cos((A+B)/2)] = 2\cos(C/2) [2\cos(A/2)\cos(B/2)] \\ = 4\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2) = VP.$$