

Tổng hợp kiến thức: Giới hạn của hàm số tại vô cực

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn tổng quan và chi tiết về các khái niệm, quy tắc và phương pháp giải toán liên quan đến giới hạn của hàm số khi biến số tiến ra vô cực, đồng thời phân tích các dạng vô định thường gặp.

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa

- Số L được gọi là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập xác định của $f(x)$ mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.
- Ký hiệu:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- Định nghĩa tương tự cho giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$. **Ký hiệu:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Một số giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$ (với c là hằng số)
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c/x^k = 0$ (với c là hằng số, k là số nguyên dương)

Ví dụ minh họa

1. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10/x^2$.

Giải: Áp dụng quy tắc, với $c = 10$ và $k = 2 > 0$, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10/x^2 = 0$.

2. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 + 5/x)$.

Giải: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 + 5/x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} 5/x = 3 + 0 = 3$.

2. Giới hạn vô cực của hàm số tại vô cực

Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$.

- **Ký hiệu:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Các trường hợp khác được định nghĩa tương tự: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ (với k là số nguyên dương)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ (nếu k là số nguyên dương chẵn)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ (nếu k là số nguyên dương lẻ)

Ví dụ minh họa

1. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$.

Giải: Vì $k = 3$ là số nguyên dương, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

2. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$.

Giải: Vì $k = 4$ là số nguyên dương chẵn, ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$.

3. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^5$.

Giải: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^5 = 5 * \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5$. Vì $k = 5$ là số lẻ, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$.

Do đó, kết quả là $-\infty$.

3. Các dạng vô định và phương pháp giải

Khi tính giới hạn tại vô cực, chúng ta thường gặp các dạng không xác định (vô định) như ∞/∞ , $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. Dưới đây là các phương pháp phổ biến để khử các dạng này.

3.1. Dạng vô định ∞/∞

Đây là dạng giới hạn của thương hai hàm số khi cả tử và mẫu đều tiến đến ∞ .

- **Phương pháp:** Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của x có trong biểu thức.
- **Trường hợp đặc biệt (hàm phân thức):** Cho hàm số $f(x) = P(x)/Q(x)$ với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n)/(b_m x^m)$, trong đó $a_n x^n$ và $b_m x^m$ là các số hạng có bậc cao nhất của tử và mẫu.

Ví dụ minh họa

1. Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x + 1) / (x^2 + 2x)$.

Giải: Bậc cao nhất là x^2 . Chia cả tử và mẫu cho x^2 :

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 1/x + 1/x^2) / (1 + 2/x) = (3 - 0 + 0) / (1 + 0) = \mathbf{3}.$$

2. Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 5) / \sqrt{x^2 + 3x}$.

Giải: Khi $x \rightarrow -\infty$, $x < 0$ nên $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Chia tử cho x , chia mẫu cho $\sqrt{x^2}$ = $-x$:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 5/x) / (-\sqrt{(x^2 + 3x)/x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 5/x) / (-\sqrt{1 + 3/x}) = (2 + 0) / (-\sqrt{1 + 0}) = \mathbf{-2}.$$

3.2. Dạng vô định $\infty - \infty$

Dạng này thường xuất hiện khi ta tính giới hạn của hiệu hai hàm số cùng tiến đến $+\infty$ (hoặc $-\infty$).

- **Phương pháp 1 (Nhân liên hợp):** Thường dùng cho các biểu thức chứa căn bậc hai. Ta nhân và chia với biểu thức liên hợp để khử dạng vô định. **Công thức:** $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$
- **Phương pháp 2 (Quy đồng mẫu số):** Dùng cho các biểu thức phân thức.

Ví dụ minh họa

1. Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$.

Giải: Đây là dạng $\infty - \infty$. Nhân và chia với biểu thức liên hợp $\sqrt{x^2 + 2x} + x$:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)] / [\sqrt{x^2 + 2x} + x]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - x^2) / (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x / (\sqrt{x^2(1 + 2/x)} + x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x / (x\sqrt{1 + 2/x} + x) \text{ (Vì } x \rightarrow +\infty \text{ nên } x > 0, \sqrt{x^2} = x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x / [x(\sqrt{1 + 2/x} + 1)]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 / (\sqrt{1 + 2/x} + 1) = 2 / (\sqrt{1 + 0} + 1) = 2/2 = \mathbf{1}.$$

2. Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x)$.

Giải: Khi $x \rightarrow -\infty$, $\sqrt{4x^2 - x} \rightarrow +\infty$ và $2x \rightarrow -\infty$, đây là dạng $\infty - \infty$. Nhân liên hợp:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\sqrt{4x^2 - x} + 2x)(\sqrt{4x^2 - x} - 2x)] / [\sqrt{4x^2 - x} - 2x]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - x - (2x)^2) / (\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x / (\sqrt{x^2(4 - 1/x)} - 2x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x / (-x\sqrt{4 - 1/x} - 2x) \text{ (Vì } x \rightarrow -\infty \text{ nên } \sqrt{x^2} = -x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x / [-x(\sqrt{4 - 1/x} + 2)]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 / (\sqrt{4 - 1/x} + 2) = 1 / (\sqrt{4 - 0} + 2) = 1 / (2 + 2) = \mathbf{1/4}.$$

3.3. Dạng vô định $0 \cdot \infty$

Dạng này xuất hiện khi tính giới hạn của tích hai hàm số, một hàm tiến đến 0 và hàm còn lại tiến đến ∞ .

- **Phương pháp:** Biến đổi biểu thức để đưa về một trong hai dạng quen thuộc là ∞/∞ hoặc $0/0$. **Cách biến đổi:** $f(x) \cdot g(x) = f(x) / (1/g(x))$ hoặc $f(x) \cdot g(x) = g(x) / (1/f(x))$.

Ví dụ minh họa

1. Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1/\sqrt{x^2+1})$.

Giải: Đây là dạng $\infty \cdot 0$. Ta có thể viết lại thành dạng ∞/∞ :

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x / \sqrt{x^2+1}$$

Chia cả tử và mẫu cho $x = \sqrt{x^2}$ (vì $x > 0$):

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 / \sqrt{1 + 1/x^2} = 1 / \sqrt{1 + 0} = \mathbf{1}.$$

2. Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Giải: Khi $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\infty$ và $(\sqrt{x^2+1} - x) \rightarrow +\infty - (-\infty) = +\infty$. Đây không phải dạng vô định $0 \cdot \infty$ mà là $(-\infty) \cdot (+\infty)$.

Do đó $L = -\infty$. (Lưu ý: Luôn kiểm tra dạng của giới hạn trước khi áp dụng phương pháp).

4. Bảng tổng kết các quy tắc tính giới hạn tại vô cực

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Việc nắm vững các định nghĩa và phương pháp trên sẽ giúp học sinh tự tin giải quyết các bài toán về giới hạn hàm số tại vô cực một cách hiệu quả.