

Chuyên đề: Tính chất đường phân giác của tam giác

Chào các em học sinh, chuyên đề hôm nay sẽ giúp các em nắm vững một trong những tính chất hình học quan trọng của tam giác: tính chất đường phân giác. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu định lý, công thức và các dạng bài tập thường gặp liên quan đến tỉ lệ thức.

Phần I: Lý thuyết trọng tâm

1. Nhắc lại về tỉ lệ thức

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số: $\mathbf{a/b = c/d}$.

- **Tính chất cơ bản:** $a.d = b.c$
- **Tính chất dãy tỉ số bằng nhau:** Từ $a/b = c/d$, ta suy ra: $\mathbf{a/b = c/d = (a+c)/(b+d) = (a-c)/(b-d)}$ (với điều kiện các mẫu số khác 0).

2. Định lý về tính chất đường phân giác trong tam giác

a. Nội dung định lý

Trong một tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

Xét tam giác ABC, có AD là đường phân giác của góc A (D thuộc BC).

Hình minh họa đường phân giác trong AD của tam giác ABC

b. Công thức

Nếu AD là đường phân giác của góc A trong $\triangle ABC$, ta có tỉ lệ thức:

$$\mathbf{DB/DC = AB/AC} \text{ hoặc } \mathbf{DB/AB = DC/AC}$$

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có AB = 6 cm, AC = 9 cm, BC = 10 cm. Đường phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính độ dài các đoạn thẳng DB và DC.

Bài giải:

1. Vì AD là đường phân giác của góc A trong $\triangle ABC$, theo tính chất đường phân giác, ta có: $DB/DC = AB/AC = 6/9 = 2/3$.
2. Từ đó suy ra: $DB/2 = DC/3$.
3. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $DB/2 = DC/3 = (DB+DC)/(2+3) = BC/5 = 10/5 = 2$.
4. Vậy:
 - $DB/2 = 2 \Rightarrow DB = 2 * 2 = 4 \text{ cm}$.
 - $DC/3 = 2 \Rightarrow DC = 2 * 3 = 6 \text{ cm}$.

Ví dụ 2: Cho $\triangle MNP$ có đường phân giác MD (D thuộc NP). Biết MN = 5 cm, DN = 2.5 cm, DP = 4 cm. Tính độ dài cạnh MP.

Bài giải:

1. Xét $\triangle MNP$, vì MD là đường phân giác của góc M, ta có: $DN/DP = MN/MP$.
2. Thay số vào, ta được: $2.5/4 = 5/MP$.

3. Suy ra: $MP = (4 * 5) / 2.5 = 20 / 2.5 = 8 \text{ cm}$.

4. Vậy độ dài cạnh MP là 8 cm.

3. Tính chất đường phân giác góc ngoài (Mở rộng)

a. Nội dung định lý

Đường phân giác của góc ngoài tại một đỉnh của tam giác chia cạnh đối diện (phần kéo dài) thành hai đoạn thẳng (tính từ hai đầu mút của cạnh đó đến giao điểm) tỉ lệ với hai cạnh kề của tam giác (với điều kiện hai cạnh kề không bằng nhau).

Xét tam giác ABC ($AB \neq AC$), tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường thẳng BC tại E.

b. Công thức

Nếu AE là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A, ta có:

$$EB/EC = AB/AC$$

Lưu ý: Điểm E nằm ngoài đoạn thẳng BC.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$. Đường phân giác góc ngoài tại A cắt BC tại E. Tính độ dài EB, EC.

Bài giải:

1. Vì AE là phân giác góc ngoài tại A, ta có: $EB/EC = AB/AC = 4/6 = 2/3$.

2. Ta biết E, B, C thẳng hàng và E nằm ngoài đoạn BC. Vì $AC > AB$ nên E nằm trên tia đối của tia CB. Do đó, $EC = EB + BC$.

3. Từ tỉ lệ thức, ta có $3 * EB = 2 * EC$.

4. Thay $EC = EB + 5$ vào, ta được: $3 * EB = 2 * (EB + 5)$.

5. $3 * EB = 2 * EB + 10$.

6. $EB = 10$ cm.

7. $EC = EB + BC = 10 + 5 = 15$ cm.

Phần II: Các dạng bài tập vận dụng

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng

Phương pháp:

- Xác định đường phân giác trong hoặc ngoài trong tam giác.
- Áp dụng công thức tỉ lệ tương ứng.
- Kết hợp với các dữ kiện khác (như tổng độ dài, hiệu độ dài) và tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm độ dài cần thiết.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Đường phân giác góc A cắt cạnh huyền BC tại D. Tính độ dài các đoạn BD, CD.

Bài giải:

1. Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$. Suy ra $BC = 20$ cm.
2. Vì AD là đường phân giác của góc A, ta có: $BD/CD = AB/AC = 12/16 = 3/4$.
3. Suy ra $BD/3 = CD/4$.

4. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $BD/3 = CD/4 = (BD+CD)/(3+4) = BC/7 = 20/7$.

5. Vậy:

◦ $BD = 3 * (20/7) = 60/7 \text{ cm.}$

◦ $CD = 4 * (20/7) = 80/7 \text{ cm.}$

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức, tỉ lệ thức

Phương pháp:

- Từ giả thiết, xác định đường phân giác và tam giác tương ứng.
- Viết tỉ lệ thức theo tính chất đường phân giác.
- Sử dụng các phép biến đổi đại số, hoặc kết hợp với các tính chất khác (tam giác đồng dạng, định lý Ta-lét) để chứng minh hệ thức yêu cầu.

Ví dụ: Cho tam giác ABC, các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $(AI/ID) = (AB+AC)/BC$.

Bài giải:

1. Xét tam giác ABD, có BI là đường phân giác của góc B. Theo tính chất đường phân giác, ta có: $AI/ID = AB/BD$ (1).
2. Xét tam giác ACD, có CI là đường phân giác của góc C. Theo tính chất đường phân giác, ta có: $AI/ID = AC/CD$ (2).
3. Từ (1) và (2), áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $AI/ID = AB/BD = AC/CD = (AB+AC)/(BD+CD)$.

4. Mà $BD + CD = BC$.

5. Vậy, $AI/ID = (AB+AC)/BC$ (điều phải chứng minh).

Dạng 3: Bài toán tổng hợp

Dạng toán này thường kết hợp tính chất đường phân giác với các kiến thức khác như tam giác đồng dạng, định lý Ta-lét, hệ thức lượng trong tam giác vuông để giải quyết các bài toán phức tạp hơn.

Ví dụ: Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng qua A cắt BD tại E, cắt BC tại F và cắt DC tại G. Chứng minh rằng: $AE^2 = EF \cdot EG$.

Bài giải:

1. Vì ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel DG$ và $AD \parallel BF$.
2. Xét $\triangle EDG$ có $AB \parallel DG$, theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $EB/ED = AB/DG = AE/EG$ (1).
3. Xét $\triangle EAB$ có $AD \parallel FB$ (do $AD \parallel BC$), theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $EB/ED = AB/AD = EF/AE$ (2). (Lưu ý: Vì $AD = BC$ và $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel FB$. Tuy nhiên, để có tỉ lệ EB/ED ta xét $\triangle DGE$ và $\triangle BEA$ đồng dạng).
4. Cách tiếp cận khác:
 - Xét $\triangle AEB$ và $\triangle GED$: Có góc $AEB =$ góc GED (đối đỉnh), góc $ABE =$ góc GDE (so le trong do $AB \parallel DG$). Vậy $\triangle AEB \sim \triangle GED$ (g.g). Suy ra $AE/GE = EB/ED$.
 - Xét $\triangle ADE$ và $\triangle FBE$: Có góc $AED =$ góc FEB (đối đỉnh), góc $DAE =$ góc BFE (so le trong do $AD \parallel BF$). Vậy $\triangle ADE \sim \triangle FBE$ (g.g). Suy ra $AE/FE = ED/EB$.
5. Từ hai tỉ lệ thức trên: $AE/GE = EB/ED$ và $AE/FE = ED/EB$.

6. Nhân vế theo vế: $(AE/GE) * (AE/FE) = (EB/ED) * (ED/EB) = 1$.

7. $(AE^2)/(GE*FE) = 1$.

8. Suy ra $AE^2 = EF * EG$ (điều phải chứng minh).

Ghi chú: Ví dụ này thiên về Ta-lét và đồng dạng hơn, nhưng thường xuất hiện trong các chuyên đề nâng cao liên quan đến tỉ lệ thức.

Phần III: Tổng kết

Tính chất đường phân giác là một công cụ mạnh để thiết lập các tỉ lệ thức về cạnh trong một tam giác. Các em cần ghi nhớ kỹ công thức cho cả đường phân giác trong và đường phân giác góc ngoài, đồng thời luyện tập các dạng bài tập để vận dụng thành thạo. Chúc các em học tốt!