

Tổng hợp kiến thức: Giải bất phương trình bậc hai bằng phương pháp xét dấu

Tài liệu này cung cấp một cách đầy đủ và chi tiết về phương pháp xét dấu tam thức bậc hai để giải bất phương trình bậc hai một ẩn, một trong những kiến thức nền tảng quan trọng của chương trình Toán lớp 10.

1. Định nghĩa Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai đối với biến x là một biểu thức có dạng:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Trong đó:

- a, b, c là các hệ số đã cho.
- $a \neq 0$.

Nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ chính là nghiệm của phương trình bậc hai tương ứng $ax^2 + bx + c = 0$.

Ví dụ:

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ là một tam thức bậc hai với $a = 2, b = -3, c = 1$.
- $g(x) = -x^2 + 4$ là một tam thức bậc hai với $a = -1, b = 0, c = 4$.
- $h(x) = 5x - 2$ không phải là tam thức bậc hai vì hệ số của x^2 bằng 0.

2. Định lý về dấu của Tam thức bậc hai

Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ phụ thuộc vào dấu của hệ số **a** và giá trị của biệt thức **$\Delta = b^2 - 4ac$** (hoặc $\Delta' = (b')^2 - ac$).

Chúng ta có 3 trường hợp chính sau đây:

Trường hợp 1: $\Delta \geq 0$

Khi $\Delta \geq 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm. Khi đó, dấu của tam thức $f(x)$ sẽ không đổi trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

- **Công thức:** Nếu $\Delta \geq 0$ thì **$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a**, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- **Giải thích:** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (một Parabol) không cắt trục hoành. Nếu $a > 0$, Parabol nằm hoàn toàn phía trên trục hoành ($f(x) > 0$). Nếu $a < 0$, Parabol nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành ($f(x) < 0$).

Ví dụ 1: Xét dấu tam thức $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

- Hệ số $a = 1 > 0$.
- Biệt thức $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$.
- Kết luận: Vì $\Delta < 0$ và $a > 0$, nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Xét dấu tam thức $g(x) = -2x^2 + x - 1$.

- Hệ số $a = -2 < 0$.
- Biệt thức $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 1 - 8 = -7 < 0$.
- Kết luận: Vì $\Delta < 0$ và $a < 0$, nên $g(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $\Delta = 0$

Khi $\Delta = 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm kép $x_0 = -b/2a$.

- **Công thức:** Nếu $\Delta = 0$ thì **$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a** , với mọi $x \neq -b/2a$. Tại $x = -b/2a$, $f(x) = 0$.
- **Giải thích:** Đồ thị Parabol $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại đúng một điểm (đỉnh của Parabol). Tại điểm tiếp xúc, $f(x) = 0$. Tại tất cả các điểm khác, $f(x)$ đều cùng dấu với a .

Ví dụ 1: Xét dấu tam thức $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

- Hệ số $a = 4 > 0$.
- Biệt thức $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$.
- Nghiệm kép: $x = -(-4)/(2 \cdot 4) = 1/2$.
- Kết luận: $f(x) > 0$ với mọi $x \neq 1/2$ và $f(1/2) = 0$.

Ví dụ 2: Xét dấu tam thức $g(x) = -x^2 - 6x - 9$.

- Hệ số $a = -1 < 0$.
- Biệt thức $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$.
- Nghiệm kép: $x = -(-6)/(2 \cdot (-1)) = -3$.
- Kết luận: $g(x) < 0$ với mọi $x \neq -3$ và $g(-3) = 0$.

Trường hợp 3: $\Delta > 0$

Khi $\Delta > 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$).

• **Công thức (Quy tắc "Trong trái, ngoài cùng"):**

- Trong khoảng hai nghiệm ($x_1 < x < x_2$), **$f(x)$ trái dấu với hệ số a .**
- Ngoài khoảng hai nghiệm ($x < x_1$ hoặc $x > x_2$), **$f(x)$ cùng dấu với hệ số a .**

• **Giải thích:** Đồ thị Parabol $y = f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Phần đồ thị nằm giữa hai điểm cắt sẽ ở phía ngược lại so với hai phần đồ thị bên ngoài.

Bảng xét dấu tổng quát:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Cùng dấu với a	0	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a	

Ví dụ 1: Xét dấu tam thức $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

- Hệ số $a = 1 > 0$.
- Biệt thức $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$.
- Phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 4$.
- Áp dụng quy tắc "Trong trái, ngoài cùng":
 - Trong khoảng $(1, 4)$, $f(x)$ trái dấu với a ($a > 0$) nên $f(x) < 0$.
 - Ngoài khoảng $(1, 4)$, tức là $x < 1$ hoặc $x > 4$, $f(x)$ cùng dấu với a nên $f(x) > 0$.
- Kết luận: $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$; $f(x) < 0$ khi $x \in (1, 4)$.

Ví dụ 2: Xét dấu tam thức $g(x) = -2x^2 - x + 3$.

- Hệ số $a = -2 < 0$.

- Phương trình $-2x^2 - x + 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -3/2$, $x_2 = 1$.
- Áp dụng quy tắc "Trong trái, ngoài cùng":
 - Trong khoảng $(-3/2, 1)$, $g(x)$ trái dấu với a ($a < 0$) nên $g(x) > 0$.
 - Ngoài khoảng $(-3/2, 1)$, tức là $x < -3/2$ hoặc $x > 1$, $g(x)$ cùng dấu với a nên $g(x) < 0$.
- Kết luận: $g(x) < 0$ khi $x \in (-\infty, -3/2) \cup (1, +\infty)$; $g(x) > 0$ khi $x \in (-3/2, 1)$.

3. Các bước giải Bất phương trình bậc hai một ẩn

Để giải bất phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $, \geq, \leq, < 0$), ta thực hiện theo các bước sau:

1. **Bước 1:** Đưa bất phương trình về đúng dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $, \geq, \leq, < 0$). Xác định tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ và các hệ số a, b, c .
2. **Bước 2:** Tìm nghiệm của tam thức $f(x)$ bằng cách giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Tính Δ và tìm các nghiệm x_1, x_2 (nếu có).
3. **Bước 3:** Lập bảng xét dấu hoặc dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai để xác định các khoảng mà $f(x)$ mang dấu phù hợp với chiều của bất phương trình.
4. **Bước 4:** Dựa vào kết quả xét dấu, kết luận tập nghiệm của bất phương trình. Lưu ý các trường hợp dấu "=" xảy ra (đối với bất phương trình $\geq$ hoặc $\leq$).

4. Ví dụ áp dụng giải các dạng bất phương trình

Dạng 1: $ax^2 + bx + c > 0$

Ví dụ: Giải bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$.

- Bước 1:** Bất phương trình đã ở dạng chuẩn. Tam thức $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, với $a = 2 > 0$.
- Bước 2:** Giải phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$.
- Bước 3:** Vì $a = 2 > 0$ và $\Delta > 0$, $f(x)$ sẽ cùng dấu với a (tức là > 0) khi x nằm ngoài khoảng hai nghiệm.
- Bước 4:** Vậy, $f(x) > 0$ khi $x < 1/2$ hoặc $x > 2$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty, 1/2) \cup (2, +\infty)$.

Dạng 2: $ax^2 + bx + c \leq 0$

Ví dụ: Giải bất phương trình $-3x^2 + 7x - 4 \leq 0$.

- Bước 1:** Bất phương trình đã ở dạng chuẩn. Tam thức $f(x) = -3x^2 + 7x - 4$, với $a = -3 < 0$.
- Bước 2:** Giải phương trình $-3x^2 + 7x - 4 = 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1$, $x_2 = 4/3$.
- Bước 3:** Vì $a = -3 < 0$ và phương trình có hai nghiệm, $f(x)$ sẽ cùng dấu với a (tức là < 0) khi x nằm ngoài khoảng hai nghiệm.
- Bước 4:** Vậy, $f(x) \leq 0$ khi $x < 1$ hoặc $x > 4/3$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty, 1) \cup (4/3, +\infty)$.

Dạng 3: $ax^2 + bx + c \geq 0$

Ví dụ: Giải bất phương trình $x^2 - 8x + 16 \geq 0$.

- Bước 1:** Bất phương trình đã ở dạng chuẩn. Tam thức $f(x) = x^2 - 8x + 16$, với $a = 1 > 0$.
- Bước 2:** Giải phương trình $x^2 - 8x + 16 = 0$. Ta có $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$.
Phương trình có nghiệm kép $x = 4$.
- Bước 3:** Vì $a = 1 > 0$ và $\Delta = 0$, $f(x)$ cùng dấu với a (tức là > 0) với mọi $x \neq 4$.
Tại $x = 4$, $f(x) = 0$.
- Bước 4:** Bất phương trình yêu cầu $f(x) \geq 0$. Ta thấy $f(x) > 0$ với mọi $x \neq 4$ và $f(x) = 0$ tại $x = 4$. Do đó, bất phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

Dạng 4: $ax^2 + bx + c \leq 0$

Ví dụ: Giải bất phương trình $5x^2 - x + 1 \leq 0$.

- Bước 1:** Bất phương trình đã ở dạng chuẩn. Tam thức $f(x) = 5x^2 - x + 1$, với $a = 5 > 0$.
- Bước 2:** Giải phương trình $5x^2 - x + 1 = 0$. Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -19 < 0$.
Phương trình vô nghiệm.
- Bước 3:** Vì $a = 5 > 0$ và $\Delta < 0$, $f(x)$ luôn cùng dấu với a , tức là $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Bước 4:** Bất phương trình yêu cầu $f(x) \leq 0$. Vì $f(x)$ luôn lớn hơn 0, nên không có giá trị nào của x thỏa mãn. Bất phương trình vô nghiệm. Tập nghiệm là $S = \emptyset$.

= $\emptyset$.

5. Tổng kết và lưu ý quan trọng

- **Nắm vững quy tắc xét dấu:** Đây là chìa khóa để giải quyết bài toán. Hãy ghi nhớ bảng tổng kết dưới đây.
- **Chú ý hệ số a:** Dấu của hệ số a là yếu tố quyết định dấu của tam thức trong các khoảng. Đừng bao giờ quên xét đến nó.
- **Phân biệt dấu bất phương trình:** Dấu $>$ và $<$ sẽ cho tập nghiệm là các khoảng mở. Dấu $\geq$ và $\leq$ sẽ cho tập nghiệm là các khoảng đóng (bao gồm cả các nghiệm).
- **Trường hợp vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x:** Thường xảy ra khi $\Delta < 0$ hoặc $\Delta = 0$. Cần phân tích cẩn thận để không bỏ sót trường hợp.

Bảng tổng kết quy tắc xét dấu $f(x) = ax^2 + bx + c$

Trường hợp	Dấu của $f(x)$
$\Delta < 0$	$f(x)$ luôn cùng dấu với a , $\forall x \in \mathbb{R}$.
$\Delta = 0$	$f(x)$ cùng dấu với a , $\forall x \neq -b/2a$. ($f(-b/2a) = 0$)
$\Delta > 0$ (nghiệm x_1, x_2)	Trong khoảng (x_1, x_2) , $f(x)$ trái dấu với a . Ngoài khoảng $[x_1, x_2]$, $f(x)$ cùng dấu với a .