

Tổng hợp chuyên đề Vận dụng cao: Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất của Hàm số

Chuyên đề này tập trung vào các dạng toán tìm Giá trị lớn nhất (GTLN - Max) và Giá trị nhỏ nhất (GTNN - Min) ở mức độ vận dụng và vận dụng cao, thường xuất hiện trong các câu hỏi cuối của đề thi THPT Quốc Gia. Việc nắm vững các phương pháp dưới đây sẽ giúp học sinh tự tin giải quyết các bài toán phức tạp.

I. Phương pháp Khảo sát Hàm số (Phương pháp dồn biến)

Đây là phương pháp nền tảng và mạnh nhất, có thể áp dụng cho nhiều dạng bài. Ý tưởng chính là biến đổi biểu thức cần tìm GTLN/GTNN về một hàm số của một biến duy nhất, sau đó khảo sát hàm số đó trên một miền xác định.

1. Các bước thực hiện

- Bước 1:** Từ điều kiện của bài toán, rút một biến theo biến còn lại hoặc đặt ẩn phụ để đưa biểu thức P về dạng hàm số một biến, ví dụ $P = f(t)$.
- Bước 2:** Tìm miền giá trị (tập xác định) của biến mới t dựa vào điều kiện ban đầu. Giả sử $t \in [a; b]$.
- Bước 3:** Tính đạo hàm $f'(t)$, giải phương trình $f'(t) = 0$ để tìm các điểm cực trị.
- Bước 4:** Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên miền $[a; b]$.

5. **Bước 5:** Dựa vào bảng biến thiên, kết luận GTLN, GTNN của **$f(t)$** , từ đó suy ra GTLN, GTNN của biểu thức P.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1:

Cho các số thực x, y thỏa mãn **$x^2 + y^2 = 2$** . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức **$P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$** .

Giải:

Ta có: **$P = 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy$** . Thay **$x^2 + y^2 = 2$** vào, ta được: **$P = 2(x+y)(2 - xy) - 3xy$** .

Đặt **$t = x + y$** . Ta có **$t^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2 + 2xy$** , suy ra **$xy = (t^2 - 2)/2$** .

Do **$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$** nên **$t^2 \leq 2(2) = 4 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2$** . Vậy **$t \in [-2; 2]$** .

Thay t và xy theo t vào P:

$$P = 2t(2 - (t^2-2)/2) - 3(t^2-2)/2 = 2t((6-t^2)/2) - (3t^2-6)/2 = 6t - t^3 - (3t^2/2) + 3.$$

Xét hàm số **$f(t) = -t^3 - (3/2)t^2 + 6t + 3$** trên đoạn **$[-2; 2]$** .

Ta có **$f'(t) = -3t^2 - 3t + 6$** . Cho **$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3(t^2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$** (nhận) hoặc **$t = -2$** (nhận).

Tính các giá trị:

- $f(-2) = -(-2)^3 - (3/2)(-2)^2 + 6(-2) + 3 = 8 - 6 - 12 + 3 = -7$**

- $f(1) = -1 - 3/2 + 6 + 3 = 13/2$

- $f(2) = -8 - 6 + 12 + 3 = 1$

Vậy **Max P = 13/2** khi $t = 1$ (ví dụ $x=1, y=0$ hoặc $x=0, y=1$ và các hoán vị thỏa mãn). **Min P = -7** khi $t = -2$ (ví dụ $x = y = -1$).

II. Phương pháp sử dụng Bất đẳng thức

Phương pháp này đòi hỏi kỹ năng biến đổi và nhận dạng các bất đẳng thức quen thuộc. Các bất đẳng thức thường dùng là AM-GM (Cô-si), Cauchy-Schwarz (Bunyakovsky),...

1. Bất đẳng thức AM-GM (Cô-si)

Công thức:

- Với hai số không âm a, b : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.
- Với n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$: $(a_1 + \dots + a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$. Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ứng dụng: Thường dùng khi các biến không âm và có mối liên hệ giữa tổng và tích.

Ví dụ:

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$.

Giải:

Ta có $P = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = (x+y+z)^2/2 + (x^2+y^2+z^2)/2$.

Do $x+y+z = 3$ nên $P = 9/2 + (x^2+y^2+z^2)/2$.

Để tìm Min P, ta cần tìm Min của $(x^2 + y^2 + z^2)$. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc (suy ra từ AM-GM hoặc Cauchy-Schwarz):

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow 3^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow 9 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$. Kết hợp với $x+y+z=3$, ta có $x = y = z = 1$.

Do đó, $\text{Min}(x^2+y^2+z^2) = 3$. Suy ra **Min P = 9/2 + 3/2 = 6**. Giá trị này đạt được khi $x = y = z = 1$.

2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (Bunyakovsky)

Công thức:

- Dạng cơ bản: Với hai bộ số (a, b) và (x, y) , ta có **$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$** . Dấu "=" xảy ra khi $a/x = b/y$.
- Dạng tổng quát (cho 2 bộ n số): **$(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) \geq (\sum a_i b_i)^2$** .

Ứng dụng: Hiệu quả khi biểu thức cần tìm min/max có dạng tổng các bình phương và điều kiện là một biểu thức tuyến tính.

Ví dụ:

Cho các số thực x, y thỏa mãn **$3x + 4y = 5$** . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức **$P = x^2 + y^2$** .

Giải:

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz cho hai bộ số $(3, 4)$ và (x, y) :

$$(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2$$

$$\Leftrightarrow 25(x^2 + y^2) \geq 5^2$$

$$\Leftrightarrow 25P \geq 25$$

$$\Leftrightarrow P \geq 1.$$

Vậy **Min P = 1**. Dấu "=" xảy ra khi $x/3 = y/4$. Kết hợp với $3x + 4y = 5$, ta giải hệ và được $x = 3/5, y = 4/5$.

III. Phương pháp Hình học hóa

Phương pháp này chuyển một bài toán đại số sang ngôn ngữ hình học. Biểu thức cần tối ưu được xem như độ dài đoạn thẳng, tổng/hiệu các độ dài, diện tích, ... Điều kiện của bài toán được chuyển thành quỹ tích của một điểm.

1. Cơ sở phương pháp

- Biểu thức $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ là khoảng cách giữa hai điểm $M(x, y)$ và $A(x_0, y_0)$ trong mặt phẳng Oxy.
- Phương trình $ax + by + c = 0$ là phương trình của một đường thẳng.
- Phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ là phương trình của một đường tròn tâm $I(a, b)$, bán kính R .

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ:

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1, 2)$ và $B(4, 1)$. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho tổng khoảng cách **MA + MB** là nhỏ nhất.

Giải:

Gọi $M(x, 0)$ là một điểm bất kỳ trên trục Ox .

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $P = MA + MB = \sqrt{(x-1)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (0-1)^2}$.

Đây là bài toán đại số khá phức tạp. Ta sẽ hình học hóa nó.

Nhận thấy $A(1, 2)$ và $B(4, 1)$ nằm cùng một phía so với trục Ox (vì tung độ đều dương).

Để tìm $\min(MA + MB)$, ta lấy điểm A' đối xứng với A qua trục Ox . Tọa độ của A' là $(1, -2)$.

Khi đó, với mọi điểm M trên Ox , ta luôn có $MA = MA'$.

Suy ra $MA + MB = MA' + MB$.

Theo bất đẳng thức tam giác trong tam giác $A'MB$, ta có $MA' + MB \geq A'B$.

Dấu "=" xảy ra khi M, A', B thẳng hàng, tức là M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ và trục Ox .

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ chính là độ dài đoạn thẳng $A'B$.

$$\min(MA + MB) = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

IV. Bài toán Max - Min chứa tham số m

Đây là dạng bài toán ngược. Thay vì tìm GTLN/GTNN, ta được cho một điều kiện về GTLN/GTNN và yêu cầu tìm tham số m .

1. Phương pháp chung

1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn/khoảng đã cho. Các giá trị này thường sẽ phụ thuộc vào tham số m .
2. Sử dụng điều kiện của bài toán (ví dụ: $\max y = 5$, hoặc $\min y + 2 \max y = 10 \dots$) để lập một phương trình hoặc bất phương trình với ẩn là m .
3. Giải phương trình/bất phương trình đó để tìm các giá trị của m .

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ:

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0, 2]$ bằng 3.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[0, 2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thuộc $[0, 2]$) hoặc $x = -1$ (loại).

Ta có:

- $f(0) = m$
- $f(1) = 1 - 3 + m = m - 2$
- $f(2) = 8 - 6 + m = m + 2$

Trên đoạn $[0, 2]$, ta có:

- $\min f(x) = f(1) = m - 2$
- $\max f(x) = f(2) = m + 2$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[0, 2]$ sẽ là $\max\{|\min f(x)|, |\max f(x)|\}$.

Vậy, $\max y = \max\{|m-2|, |m+2|\}$.

Theo đề bài, $\max y = 3$, nên ta có $\max\{|m-2|, |m+2|\} = 3$.

Điều này tương đương với hệ:

- $|m-2| \leq 3$
- $|m+2| \leq 3$
- Hoặc $|m-2| = 3$ hoặc $|m+2| = 3$

Cách giải đơn giản hơn: $\max\{|A|, |B|\} = C$ có nghĩa là một trong hai giá trị tuyệt đối bằng C , và giá trị còn lại nhỏ hơn hoặc bằng C .

Trường hợp 1: $|m+2| = 3$ và $|m-2| \leq 3$

$|m+2| = 3 \Leftrightarrow m+2 = 3$ hoặc $m+2 = -3 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -5$.

- Với $m = 1$: $|1-2| = 1 \leq 3$ (Thỏa mãn).
- Với $m = -5$: $|-5-2| = 7 > 3$ (Loại).

Trường hợp 2: $|m-2| = 3$ và $|m+2| \leq 3$

$|m-2| = 3 \Leftrightarrow m-2 = 3$ hoặc $m-2 = -3 \Leftrightarrow m = 5$ hoặc $m = -1$.

- Với $m = 5$: $|5+2| = 7 > 3$ (Loại).
- Với $m = -1$: $|-1+2| = 1 \leq 3$ (Thỏa mãn).

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 1$ và $m = -1$.

V. Bài toán thực tế

Các bài toán này yêu cầu học sinh mô hình hóa tình huống thực tế bằng các công thức toán học, sau đó áp dụng các phương pháp trên để tìm lời giải.

Ví dụ:

Một người nông dân có 100m lưới và muốn rào một khu đất hình chữ nhật ven sông để trồng rau (chỉ cần rào 3 cạnh, cạnh ven sông không cần rào). Hỏi người đó phải rào khu đất với kích thước như thế nào để diện tích trồng rau là lớn nhất?

Giải:

- Mô hình hóa:** Gọi chiều rộng của khu đất là x (m) (cạnh vuông góc với sông), và chiều dài là y (m) (cạnh song song với sông). Điều kiện: $x > 0$, $y > 0$.
- Thiết lập hàm số:**
 - Tổng chiều dài lưới là chu vi 3 cạnh: $2x + y = 100$.
 - Diện tích khu đất: $S = x * y$.
- Đưa về hàm một biến:** Từ $2x + y = 100$, ta rút ra $y = 100 - 2x$. Thay vào S : $S(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.
- Tìm miền xác định:**
 - $x > 0$
 - $y > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 100 \Leftrightarrow x < 50$.

Vậy ta cần tìm GTLN của $S(x)$ trên khoảng $(0, 50)$.

5. **Khảo sát hàm số:** Xét hàm số $S(x) = -2x^2 + 100x$ trên $(0, 50)$. Đây là một parabol có bề lõm quay xuống, đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.

Hoành độ đỉnh: $x = -b/(2a) = -100 / (2*(-2)) = 25$.

Giá trị $x = 25$ thuộc khoảng $(0, 50)$.

6. **Kết luận:** Diện tích lớn nhất đạt được khi $x = 25\text{m}$. Khi đó, $y = 100 - 2(25) = 50\text{m}$. Diện tích lớn nhất là $S_{\text{max}} = 25 * 50 = 1250 \text{ m}^2$.

Vậy, để diện tích lớn nhất, người nông dân cần rào khu đất có chiều rộng 25m và chiều dài 50m.