

Tổng hợp kiến thức: Phương pháp tọa độ hóa trong hình học không gian

Phương pháp tọa độ hóa là một công cụ mạnh mẽ giúp giải quyết các bài toán hình học không gian bằng cách chuyển các đối tượng hình học (điểm, đường thẳng, mặt phẳng) sang các đối tượng đại số (tọa độ, phương trình). Điều này giúp đơn giản hóa việc tính toán các yếu tố như khoảng cách, góc, thể tích, đặc biệt trong các bài toán phức tạp.

1. Khi nào nên sử dụng phương pháp tọa độ hóa?

Phương pháp này đặc biệt hiệu quả khi bài toán có các yếu tố sau:

- **Yếu tố vuông góc:** Bài toán chứa nhiều cạnh, nhiều mặt phẳng vuông góc với nhau (ví dụ: hình lập phương, hình hộp chữ nhật, hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy).
- **Hình học quen thuộc:** Các khối đa diện quen thuộc như hình lập phương, hình hộp chữ nhật, hình lăng trụ đứng, hình chóp đều.
- **Yêu cầu tính toán:** Bài toán yêu cầu tính toán chính xác các đại lượng như góc, khoảng cách, thể tích mà việc dựng hình và tính toán theo phương pháp hình học thuần túy gặp khó khăn.
- **Không yêu cầu chứng minh phức tạp:** Khi mục tiêu là tìm ra đáp số cuối cùng thay vì chứng minh các tính chất hình học.

2. Các bước cơ bản để giải bài toán bằng phương pháp tọa độ hóa

1. **Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp.** Đây là bước quan trọng nhất, quyết định độ phức tạp của các phép tính sau này. Cần chọn gốc tọa độ và các trục sao cho tọa độ của các điểm trong hình là đơn giản nhất.
2. **Bước 2: Xác định tọa độ các đỉnh của hình.** Dựa vào hệ trục đã chọn và các giả thiết về độ dài, tính chất hình học, ta suy ra tọa độ của các điểm cần thiết.
3. **Bước 3: Chuyển các yêu cầu của bài toán sang ngôn ngữ tọa độ.** Ví dụ: tính khoảng cách giữa hai điểm, viết phương trình đường thẳng, mặt phẳng, tính góc giữa hai vector,...
4. **Bước 4: Thực hiện các phép tính tọa độ để tìm ra kết quả.** Sử dụng các công thức đã học trong chương trình hình học Oxyz để giải quyết yêu cầu bài toán và kết luận.

3. Cách chọn hệ trục tọa độ Oxyz cho các dạng hình phổ biến

Việc chọn hệ trục tọa độ thông minh sẽ giúp việc tính toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Loại hình	Cách chọn hệ trục tọa độ
Hình lập phương, Hình hộp chữ nhật	Chọn một đỉnh làm gốc tọa độ (ví dụ đỉnh A). Ba trục Ox, Oy, Oz trùng với ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó (ví dụ: $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AA'$).
Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	Chọn gốc tọa độ là chân đường cao (ví dụ: cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, ta chọn A làm gốc O). Trục Oz trùng với đường cao SA. Hai trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng đáy và thường chọn trùng với hai cạnh của đáy nếu chúng vuông góc.
Hình lăng trụ đứng	Chọn một đỉnh của đáy làm gốc tọa độ (ví dụ đỉnh A). Trục Oz trùng với cạnh bên (ví dụ: AA'). Hai trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng đáy.
Hình chóp đều (ví dụ S.ABCD)	Chọn gốc tọa độ O là tâm của đáy. Trục Oz trùng với đường cao SO. Các trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng đáy và thường đi qua các đỉnh hoặc trung điểm các cạnh của đáy.

4. Ứng dụng giải các bài toán cụ thể

4.1. Tính độ dài đoạn thẳng và khoảng cách giữa hai điểm

Công thức: Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$ là **$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$** .

Ví dụ: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm M(1; 2; 3) và N(4; -2; 0). Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Giải: Áp dụng công thức, ta có:

$$MN = \sqrt{[(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 + (0 - 3)^2]} = \sqrt{[3^2 + (-4)^2 + (-3)^2]} = \sqrt{[9 + 16 + 9]} = \sqrt{34}.$$

4.2. Tính góc giữa hai đường thẳng

Công thức: Góc α giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có vector chỉ phương lần lượt là $\mathbf{u}_1$ và $\mathbf{u}_2$ được tính bởi công thức: **$\cos(\alpha) = |\cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)| = |\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2| / (|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)$** .

Ví dụ: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và A'B.

Giải:

1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với $O \equiv A$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AA'$.
2. Tọa độ các đỉnh: $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,a,0)$, $D(0,a,0)$, $A'(0,0,a)$.
3. Vector chỉ phương của AC là $\mathbf{AC} = (a, a, 0)$.
4. Vector chỉ phương của A'B là $\mathbf{A'B} = (a, 0, -a)$.
5. Áp dụng công thức: $\cos(AC, A'B) = |(a \cdot a + a \cdot 0 + 0 \cdot (-a))| / (\sqrt{a^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + (-a)^2}) = |a^2| / (\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2}) = a^2 / (a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}) = a^2 / (2a^2) = 1/2$.
6. Vậy góc giữa AC và A'B là 60° .

4.3. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Công thức: Khoảng cách từ điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là: $d(M, (P)) = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

Giải:

- Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv B$, $Ox \equiv BA$, $Oy \equiv BC$, Oz hướng lên trên.
Do $SA \perp (ABC)$ nên cách chọn này không tối ưu. Ta chọn lại: $O \equiv A$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$ (AD song song và bằng BC), $Oz \equiv AS$.
- Tọa độ các điểm: $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $S(0,0,2a)$, $C(a, a\sqrt{3}, 0)$.
- Viết phương trình mặt phẳng (SAC) . Ta có $\mathbf{AS} = (0,0,2a)$ và $\mathbf{AC} = (a, a\sqrt{3}, 0)$.
- Vector pháp tuyến của (SAC) là $\mathbf{n} = [\mathbf{AS}, \mathbf{AC}] = (-2a^2\sqrt{3}, 2a^2, 0)$. Ta có thể chọn vector pháp tuyến đơn giản hơn là $\mathbf{n}' = (-\sqrt{3}, 1, 0)$.
- Phương trình mặt phẳng (SAC) đi qua $A(0,0,0)$ có dạng: $-\sqrt{3}(x-0) + 1(y-0) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x + y = 0$.
- Khoảng cách từ $B(a,0,0)$ đến (SAC) :
$$d(B, (SAC)) = |-\sqrt{3} \cdot a + 0| / \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2} = |-\sqrt{3}a| / \sqrt{3+1} = a\sqrt{3} / 2.$$

4.4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Công thức: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 (đi qua M_1 có VTCP $\mathbf{u}_1$) và d_2 (đi qua M_2 có VTCP $\mathbf{u}_2$) là: $d(d_1, d_2) = |[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2| / |[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]|$.

Ví dụ: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'D.

Giải:

1. Chọn hệ trục Oxyz với $O \equiv A$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AA'$.
2. Tọa độ các điểm: $A'(0,0,a)$, $B(a,0,0)$, $B'(a,0,a)$, $D(0,a,0)$.
3. Đường thẳng A'B đi qua $B(a,0,0)$ và có VTCP $\mathbf{u}_1 = \mathbf{BA}' = (-a, 0, a)$.
4. Đường thẳng B'D đi qua $D(0,a,0)$ và có VTCP $\mathbf{u}_2 = \mathbf{DB}' = (a, -a, a)$.
5. Ta có $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{BD} = (-a, a, 0)$.
6. Tính tích có hướng: $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = (a^2, 2a^2, a^2)$.
7. Tính độ lớn tích có hướng: $|[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]| = \sqrt{(a^4 + 4a^4 + a^4)} = a^2\sqrt{6}$.
8. Tính tích hỗn tạp: $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{BD} = a^2(-a) + 2a^2(a) + a^2(0) = -a^3 + 2a^3 = a^3$.
9. Khoảng cách cần tìm: $d(A'B, B'D) = |a^3| / (a^2\sqrt{6}) = a/\sqrt{6} = a\sqrt{6}/6$.

4.5. Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Công thức: Góc α giữa đường thẳng d (VTCP $\mathbf{u}$) và mặt phẳng (P) (VTPT $\mathbf{n}$) được tính bởi: **$\sin(\alpha) = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| / (|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|)$** .

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

Giải:

1. Chọn hệ trục Oxyz với $O \equiv A$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AS$.
2. Tọa độ các điểm: $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,a,0)$, $S(0,0,a\sqrt{2})$.

- VTCP của đường thẳng SC là $\mathbf{SC} = (a, a, -a\sqrt{2})$.
- Mặt phẳng (SAB) chính là mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$. Tuy nhiên, ta cần VTPT. Mặt phẳng (SAB) chứa AS (trục Oz) và AB (trục Ox) nên VTPT của nó là $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ (cùng phương với trục Oy).
- Áp dụng công thức: $\sin(\alpha) = |(a \cdot 0 + a \cdot 1 + (-a\sqrt{2}) \cdot 0)| / (\sqrt{(a^2 + a^2 + (-a\sqrt{2})^2)} \cdot \sqrt{(0^2 + 1^2 + 0^2)}) = |a| / (\sqrt{(4a^2)} \cdot 1) = a / (2a) = 1/2$.
- Vậy góc giữa SC và (SAB) là 30° .

4.6. Tính góc giữa hai mặt phẳng

Công thức: Góc α giữa hai mặt phẳng (P) (VTPT $\mathbf{n}_1$) và (Q) (VTPT $\mathbf{n}_2$) được tính bởi: $\cos(\alpha) = |\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2| / (|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|)$.

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải:

- Chọn hệ trục Oxyz với $O \equiv A$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AS$.
- Tọa độ các điểm: $S(0, 0, a)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(0, a, 0)$.
- Tìm VTPT của (SBC): $\mathbf{SB} = (a, 0, -a)$, $\mathbf{SC} = (a, a, -a)$. VTPT $\mathbf{n}_1 = [\mathbf{SB}, \mathbf{SC}] = (a^2, 0, a^2)$. Chọn $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 1)$.
- Tìm VTPT của (SCD): $\mathbf{SC} = (a, a, -a)$, $\mathbf{SD} = (0, a, -a)$. VTPT $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{SC}, \mathbf{SD}] = (0, a^2, a^2)$. Chọn $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$.
- Áp dụng công thức: $\cos(\alpha) = |1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1| / (\sqrt{(1^2 + 1^2)} \cdot \sqrt{(1^2 + 1^2)}) = 1 / (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1/2$.

6. Vậy góc giữa hai mặt phẳng là 60° .

4.7. Tính thể tích khối đa diện

Công thức thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = (1/6) |[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] \cdot \mathbf{AD}|$.

Công thức thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D': $V = |[\mathbf{AB}, \mathbf{AD}] \cdot \mathbf{AA}'|$.

Ví dụ: Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-1;-1;-1)$. Tính thể tích tứ diện ABCD.

Giải:

1. Tính các vector: $\mathbf{AB} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{AC} = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{AD} = (-2, -1, -1)$.
2. Tính tích có hướng: $[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] = (1, 1, 1)$.
3. Tính tích hỗn tạp: $[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}] \cdot \mathbf{AD} = 1(-2) + 1(-1) + 1(-1) = -2 - 1 - 1 = -4$.
4. Thể tích tứ diện: $V = (1/6) |-4| = 4/6 = 2/3$ (đvtt).

Kết luận

Phương pháp tọa độ hóa là một công cụ cực kỳ hiệu quả để giải quyết các bài toán định lượng trong hình học không gian. Việc nắm vững cách chọn hệ trục tọa độ và các công thức tính toán sẽ giúp học sinh tự tin chinh phục các câu hỏi vận dụng và vận dụng cao trong các kỳ thi. Tuy nhiên, cần lưu ý rằng phương pháp này có thể trở nên phức tạp nếu hệ trục được chọn không hợp lý. Do đó, việc luyện tập thường xuyên với nhiều dạng bài là rất cần thiết.