

Ứng dụng đa thức trong tính diện tích các hình phức hợp

Trong thực tế và trong toán học, chúng ta thường gặp những hình không phải là hình vuông, hình chữ nhật hay tam giác đơn thuần. Đó là các hình phức hợp, được ghép lại từ nhiều hình cơ bản. Đa thức là một công cụ mạnh mẽ giúp chúng ta tính toán diện tích của những hình này, đặc biệt khi các kích thước của chúng được biểu thị bằng các biến số.

I. Ôn tập kiến thức trọng tâm về đa thức

Trước khi đi vào ứng dụng, chúng ta cần nắm vững các phép toán cơ bản với đa thức.

1. Cộng và trừ đa thức

- **Công thức:** Để cộng (hoặc trừ) hai đa thức, ta nhóm các hạng tử đồng dạng lại với nhau rồi thực hiện phép cộng (hoặc trừ) các hệ số của chúng.
- **Giải thích:** Các hạng tử đồng dạng là các hạng tử có cùng phần biến (ví dụ: $3x^2$ và $-5x^2$). Ta chỉ cộng/trừ hệ số và giữ nguyên phần biến.

Ví dụ 1 (Cộng): Cho hai đa thức $A = 3x^2 - 4xy + 2y$ và $B = -x^2 + 6xy + 3$.

$$\begin{aligned} A + B &= (3x^2 - 4xy + 2y) + (-x^2 + 6xy + 3) \\ &= (3x^2 - x^2) + (-4xy + 6xy) + 2y + 3 \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y + 3 \end{aligned}$$

Ví dụ 2 (Trừ): Cho $P = 5x^3 - 2x + 1$ và $Q = x^3 - 4x^2 + 2x$.

$$P - Q = (5x^3 - 2x + 1) - (x^3 - 4x^2 + 2x)$$

$$= 5x^3 - 2x + 1 - x^3 + 4x^2 - 2x$$

$$= (5x^3 - x^3) + 4x^2 + (-2x - 2x) + 1$$

$$= 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1$$

2. Nhân đa thức

- **Nhân đơn thức với đa thức:** Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức đó với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các kết quả lại với nhau.

Công thức: $A(B + C) = AB + AC$

- **Nhân đa thức với đa thức:** Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các kết quả lại với nhau.

Công thức: $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$

Ví dụ 1 (Nhân đơn thức với đa thức): Tính $2x(x^2 - 3y + 5)$

$$2x(x^2 - 3y + 5) = (2x)(x^2) + (2x)(-3y) + (2x)(5)$$

$$= 2x^3 - 6xy + 10x$$

Ví dụ 2 (Nhân đa thức với đa thức): Tính $(x + 2)(x - y + 1)$

$$(x + 2)(x - y + 1) = x(x - y + 1) + 2(x - y + 1)$$

$$= (x^2 - xy + x) + (2x - 2y + 2)$$

$$= x^2 - xy + 3x - 2y + 2$$

3. Một số hằng đẳng thức đáng nhớ

Hằng đẳng thức giúp ta thực hiện các phép nhân đa thức nhanh hơn.

Tên hằng đẳng thức	Công thức
Bình phương của một tổng	$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
Bình phương của một hiệu	$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
Hiệu hai bình phương	$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

II. Tính diện tích hình phức hợp bằng đa thức

Một hình phức hợp là hình được tạo thành bằng cách ghép các hình cơ bản hoặc khoét bỏ một phần từ một hình cơ bản. Ta có hai phương pháp chính để tính diện tích của chúng.

Phương pháp 1: Chia hình phức hợp thành các hình cơ bản

Nguyên tắc: Chia hình phức hợp thành các hình chữ nhật, hình vuông, hình tam giác... quen thuộc. Tính diện tích từng hình thành phần (dưới dạng đa thức) rồi cộng các kết quả lại.

Ví dụ 1: Tính diện tích của một mảnh đất hình chữ L có kích thước như hình vẽ (Giả sử hình được tạo từ hai hình chữ nhật ghép lại).

- Cạnh dài tổng thể: $x + 5$
- Cạnh rộng tổng thể: $x + 3$
- Phần bị cắt đi có chiều dài 5 và chiều rộng x .

Cách giải: Ta có thể chia hình chữ L thành 2 hình chữ nhật nhỏ.

1. Hình chữ nhật 1 (khối đứng):

- Chiều dài: $x + 3$
- Chiều rộng: x

Diện tích $S_1 = x(x + 3) = \mathbf{x^2 + 3x}$

2. Hình chữ nhật 2 (khối ngang):

- Chiều dài: 5
- Chiều rộng: 3 (Vì $(x+3) - x = 3$)

Diện tích $S_2 = 5 * 3 = \mathbf{15}$

3. Tổng diện tích: $S = S_1 + S_2 = (x^2 + 3x) + 15 = \mathbf{x^2 + 3x + 15}$

Ví dụ 2: Một sân chơi có hình dạng ghép bởi một hình chữ nhật và một hình tam giác vuông. Hình chữ nhật có chiều dài là $2x+3$ và chiều rộng là x . Tam giác vuông có một cạnh góc vuông trùng với chiều rộng của hình chữ nhật (dài x), và cạnh góc vuông còn lại có độ dài là $x+1$.

Cách giải:

1. Diện tích hình chữ nhật (S_{hcn}): $S_{\text{hcn}} = x(2x + 3) = \mathbf{2x^2 + 3x}$

2. Diện tích hình tam giác vuông (S_{tg}): $S_{\text{tg}} = (1/2) * x * (x + 1) = \mathbf{(1/2)x^2 + (1/2)x}$

3. Tổng diện tích sân chơi: $S = S_{\text{hcn}} + S_{\text{tg}} = (2x^2 + 3x) + ((1/2)x^2 + (1/2)x)$
 $= (2x^2 + (1/2)x^2) + (3x + (1/2)x)$

$$= (5/2)x^2 + (7/2)x$$

Phương pháp 2: Sử dụng phần bù (Lấy diện tích hình lớn trừ đi diện tích phần bị khoét)

Nguyên tắc: Vẽ một hình chữ nhật (hoặc hình vuông) lớn bao quanh toàn bộ hình phức hợp. Diện tích hình cần tính bằng diện tích hình lớn trừ đi diện tích các phần "thừa" (phần bù).

Ví dụ 1: Tính lại diện tích mảnh đất hình chữ L ở ví dụ trên bằng phương pháp phần bù.

Cách giải:

1. Tạo hình chữ nhật lớn bao quanh:

- Chiều dài: $x + 5$
- Chiều rộng: $x + 3$

$$\text{Diện tích hình chữ nhật lớn } (S_{\text{lớn}}) = (x + 5)(x + 3)$$

$$= x(x + 3) + 5(x + 3)$$

$$= x^2 + 3x + 5x + 15$$

$$= \mathbf{x^2 + 8x + 15}$$

2. Tính diện tích phần bị cắt bỏ (phần bù): Phần bị cắt bỏ là một hình chữ nhật nhỏ có:

- Chiều dài: $(x+5) - x = 5$
- Chiều rộng: x

$$\text{Diện tích phần bù } (S_{\text{bù}}) = 5 * x = \mathbf{5x}$$

3. **Diện tích hình chữ L:** $S = S_{\text{lớn}} - S_{\text{bù}} = (x^2 + 8x + 15) - 5x$
 $= x^2 + 3x + 15$

Nhận xét: Cả hai phương pháp đều cho cùng một kết quả.

Ví dụ 2: Một tấm bìa hình chữ nhật có chiều dài $3x + 4$ và chiều rộng $2x + 1$. Người ta khoét một lỗ hình vuông ở giữa có cạnh là x .

Cách giải:

1. **Diện tích tấm bìa hình chữ nhật ban đầu (S_{hcn}):** $S_{\text{hcn}} = (3x + 4)(2x + 1)$
 $+ 1)$
 $= 3x(2x + 1) + 4(2x + 1)$
 $= 6x^2 + 3x + 8x + 4$
 $= 6x^2 + 11x + 4$
2. **Diện tích lỗ hình vuông bị khoét (S_{hv}):** $S_{\text{hv}} = x * x = x^2$
3. **Diện tích phần bìa còn lại:** $S = S_{\text{hcn}} - S_{\text{hv}} = (6x^2 + 11x + 4) - x^2$
 $= 5x^2 + 11x + 4$

III. Bài tập vận dụng

Bài 1: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài là $(5x + 3)$ mét và chiều rộng là $(3x - 1)$ mét. Bên trong khu vườn, người ta xây một bể bơi hình vuông có cạnh là $(x - 1)$ mét. Viết đa thức biểu thị diện tích phần đất còn lại của khu vườn (với $x > 1$).

Hướng dẫn giải:

1. Tính diện tích khu vườn hình chữ nhật: $S_{\text{vườn}} = (5x + 3)(3x - 1) = 15x^2 - 5x + 9x - 3 = \mathbf{15x^2 + 4x - 3}$
2. Tính diện tích bể bơi hình vuông: $S_{\text{bể}} = (x - 1)^2 = \mathbf{x^2 - 2x + 1}$
3. Tính diện tích phần đất còn lại: $S = S_{\text{vườn}} - S_{\text{bể}}$
 $S = (15x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1)$
 $S = 15x^2 + 4x - 3 - x^2 + 2x - 1$
 $S = \mathbf{14x^2 + 6x - 4}$ (mét vuông)

Bài 2: Tính diện tích của một hình thang có đáy lớn là $(3y + 5)$, đáy nhỏ là $(y + 1)$ và chiều cao là $2y$ (với $y > 0$).

Hướng dẫn giải: Áp dụng công thức diện tích hình thang: $S = (1/2) * (\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) * \text{chiều cao}$

1. Tổng hai đáy: $(3y + 5) + (y + 1) = \mathbf{4y + 6}$
2. Nhân với chiều cao: $(4y + 6) * 2y = 8y^2 + 12y$
3. Nhân với $1/2$: $S = (1/2) * (8y^2 + 12y) = \mathbf{4y^2 + 6y}$