

TỔNG HỢP KIẾN THỨC: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH (DẠNG NĂNG SUẤT)

Bài toán về năng suất lao động là một dạng toán thực tế quan trọng trong chương trình Toán lớp 9. Để giải quyết tốt dạng toán này, học sinh cần nắm vững các khái niệm cơ bản, công thức liên hệ và phương pháp giải chung. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức cần thiết.

I. Kiến thức cần nhớ

1. Các đại lượng cơ bản

Một bài toán năng suất luôn xoay quanh ba đại lượng chính:

- **Tổng khối lượng công việc (KLCCV):** Là toàn bộ công việc cần phải hoàn thành. Đại lượng này có thể được đo bằng số sản phẩm, số mét đường, thể tích bể nước (m^3), hoặc đôi khi được quy ước là 1 đơn vị công việc nếu đề bài không cho số liệu cụ thể.
- **Năng suất lao động (NSLĐ):** Là lượng công việc làm được trong một đơn vị thời gian (ví dụ: số sản phẩm/ngày, số m^3 /giờ). Đây là đại lượng thể hiện mức độ hiệu quả của công việc.
- **Thời gian hoàn thành (TGHT):** Là tổng thời gian cần thiết để hoàn thành toàn bộ khối lượng công việc với một năng suất nhất định.

2. Công thức liên hệ

Ba đại lượng trên liên hệ với nhau qua một công thức cốt lõi, tương tự công thức của chuyển động đều ($S = v \times t$):

Khối lượng công việc = Năng suất lao động × Thời gian hoàn thành

Từ công thức gốc, ta có thể suy ra hai công thức hệ quả:

- **Năng suất lao động = Khối lượng công việc / Thời gian hoàn thành**
- **Thời gian hoàn thành = Khối lượng công việc / Năng suất lao động**

3. Một số lưu ý quan trọng

- **Quy ước đơn vị công việc:** Nếu đề bài không cho biết khối lượng công việc cụ thể (ví dụ: hai đội cùng làm xong một con đường), ta xem toàn bộ công việc là **1 đơn vị**. Khi đó, năng suất của một đối tượng chính là phần công việc mà đối tượng đó làm được trong một đơn vị thời gian.
- **Thống nhất đơn vị:** Các đơn vị của ba đại lượng phải tương ứng với nhau. Nếu thời gian tính bằng 'ngày' thì năng suất phải là 'lượng công việc/ngày'. Nếu thời gian tính bằng 'giờ', năng suất phải là 'lượng công việc/giờ'. Cần đổi đơn vị nếu cần thiết.
- **Năng suất chung:** Khi nhiều đối tượng cùng làm chung một công việc, năng suất chung bằng tổng năng suất riêng của các đối tượng đó. ($NS_{\text{chung}} = NS_1 + NS_2 + \dots$).

II. Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

Quy trình giải một bài toán năng suất cũng tuân theo 3 bước cơ bản của giải bài toán bằng cách lập phương trình:

1. Bước 1: Lập phương trình (hoặc hệ phương trình)

- **Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn:** Thường chọn đại lượng đề bài hỏi làm ẩn (ví dụ: thời gian hoàn thành riêng, năng suất riêng). Điều kiện của ẩn thường là số dương ($x > 0$).
- **Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết:** Đây là bước quan trọng nhất. Kẻ bảng để phân tích các đại lượng (KLCCV, Năng suất, Thời gian) của các đối tượng hoặc các giai đoạn (dự định, thực tế) là một phương pháp rất hiệu quả.
- **Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng:** Dựa vào các dữ kiện của bài toán (ví dụ: tổng thời gian, khối lượng công việc chênh lệch,...) để thiết lập phương trình.

2. Bước 2: Giải phương trình (hoặc hệ phương trình) vừa lập.

3. Bước 3: Đối chiếu nghiệm với điều kiện ban đầu và kết luận. Trả lời câu hỏi của bài toán một cách đầy đủ.

III. Các dạng bài toán thường gặp và ví dụ minh họa

Dạng 1: Bài toán làm chung - làm riêng

Phương pháp: Dạng toán này thường liên quan đến hai hoặc nhiều đối tượng (người, máy, vòi nước...) cùng thực hiện một công việc. Ta thường đặt ẩn là thời gian hoàn thành công việc một mình của mỗi đối tượng, từ đó suy ra năng suất riêng của họ.

Ví dụ 1: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn (không có nước) thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và sau 4 giờ mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $8\frac{1}{3}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể?

Phân tích và giải:

- **Bước 1: Lập phương trình.**

- Gọi thời gian để vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là x (giờ), điều kiện $x > 6$.
- Trong 1 giờ, vòi thứ hai chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể). Đây là năng suất của vòi 2.
- Hai vòi cùng chảy sau 6 giờ đầy bể, vậy trong 1 giờ, cả hai vòi chảy được: $\frac{1}{6}$ (bể). Đây là năng suất chung.
- Suy ra, trong 1 giờ, vòi thứ nhất chảy được (năng suất vòi 1): $\frac{1}{6} - \frac{1}{x}$ (bể).
- Theo giả thiết thứ hai: vòi 1 chảy một mình trong 4 giờ, sau đó cả hai vòi cùng chảy trong $8\frac{1}{3}$ giờ thì đầy bể. Ta có phương trình biểu diễn khối

lượng công việc:

Lượng nước vôi 1 chảy trong 4 giờ + Lượng nước cả 2 vôi chảy trong $\frac{8}{3}$ giờ = 1 (đầy bể)

$$4 * (\frac{1}{6} - \frac{1}{x}) + (\frac{8}{3}) * (\frac{1}{6}) = 1$$

• **Bước 2: Giải phương trình.**

$$\frac{4}{6} - \frac{4}{x} + \frac{8}{18} = 1$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{x} + \frac{4}{9} = 1$$

$$\frac{10}{9} - \frac{4}{x} = 1$$

$$\frac{4}{x} = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

$$x = 36$$

• **Bước 3: Đối chiếu và kết luận.**

Giá trị $x = 36$ thỏa mãn điều kiện $x > 6$. Vậy, nếu ngay từ đầu chỉ mở vôi thứ hai thì sau 36 giờ mới đầy bể.

Ví dụ 2: Hai đội công nhân cùng sửa một con đường thì sau 24 ngày sẽ xong. Mỗi ngày, phần việc làm được của đội A bằng $\frac{3}{2}$ phần việc làm được của đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội sửa xong con đường trong bao lâu?

Phân tích và giải:

• **Bước 1: Lập hệ phương trình.**

- Gọi năng suất của đội A là x (công việc/ngày) và năng suất của đội B là y (công việc/ngày). Điều kiện $x, y > 0$.

- Hai đội cùng làm sau 24 ngày xong, nên năng suất chung là $1/24$. Ta có phương trình: $x + y = 1/24$ (1)
- Mỗi ngày, phần việc của đội A bằng $3/2$ đội B, nên ta có phương trình: $x = (3/2)y$ (2)

• Bước 2: Giải hệ phương trình.

Thế (2) vào (1): $(3/2)y + y = 1/24$

$$(5/2)y = 1/24 \Rightarrow y = (1/24) * (2/5) = 1/60.$$

Suy ra $x = (3/2) * (1/60) = 1/40$.

• Bước 3: Đối chiếu và kết luận.

Năng suất đội A là $1/40$ (công việc/ngày) $\Rightarrow$ Thời gian đội A làm một mình xong việc là $1 / (1/40) = 40$ ngày.

Năng suất đội B là $1/60$ (công việc/ngày) $\Rightarrow$ Thời gian đội B làm một mình xong việc là $1 / (1/60) = 60$ ngày.

Vậy, đội A làm một mình hết 40 ngày, đội B làm một mình hết 60 ngày.

Dạng 2: Bài toán so sánh năng suất dự định và thực tế

Phương pháp: Dạng bài này thường cho biết kế hoạch (dự định) và quá trình thực hiện (thực tế) có sự thay đổi về năng suất, dẫn đến thời gian hoàn thành thay đổi (sớm hơn hoặc muộn hơn). Ta thường lập bảng để so sánh các đại lượng giữa dự định và thực tế, từ đó tìm ra phương trình.

Ví dụ 3: Một tổ sản xuất theo kế hoạch mỗi ngày phải sản xuất 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó, tổ đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Phân tích và giải:

	Năng suất (sản phẩm/ngày)	Tổng số sản phẩm	Thời gian (ngày)
Kế hoạch	50	x	$x/50$
Thực tế	57	$x + 13$	$(x + 13)/57$

• **Bước 1: Lập phương trình.**

- Gọi tổng số sản phẩm tổ phải sản xuất theo kế hoạch là x (sản phẩm).
Điều kiện: $x > 0$, x là số nguyên.
- Thời gian dự định hoàn thành: $x/50$ (ngày).
- Số sản phẩm thực tế làm được: $x + 13$ (sản phẩm).
- Thời gian thực tế hoàn thành: $(x + 13)/57$ (ngày).
- Vì tổ hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày, nên thời gian dự định nhiều hơn thời gian thực tế là 1 ngày. Ta có phương trình:

$x/50 - (x + 13)/57 = 1$

• **Bước 2: Giải phương trình.**

Quy đồng mẫu số chung là $50 * 57 = 2850$:

$$57x - 50(x + 13) = 2850$$

$$57x - 50x - 650 = 2850$$

$$7x = 3500$$

$$x = 500$$

• **Bước 3: Đối chiếu và kết luận.**

Giá trị $x = 500$ thỏa mãn điều kiện. Vậy, theo kế hoạch, tổ phải sản xuất 500 sản phẩm.

IV. Bài tập tự luyện

- Bài 1:** Một máy bơm muốn bơm đầy nước vào một bể chứa trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm được 10 m^3 . Sau khi bơm được $\frac{1}{3}$ thể tích bể, người ta vận hành máy bơm công suất lớn hơn, mỗi giờ bơm được 15 m^3 . Do đó, so với quy định, bể được bơm đầy trước 48 phút. Tính thể tích của bể chứa.
- Bài 2:** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình thì trong bao lâu sẽ xong?
- Bài 3:** Một đội xe cần vận chuyển 160 tấn gạo với khối lượng mỗi xe chở bằng nhau. Khi sắp khởi hành, đội được bổ sung thêm 4 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn dự định 2 tấn. Hỏi lúc đầu đội xe có bao nhiêu chiếc?