

I. Định nghĩa và tính chất của thiết diện

1. Định nghĩa

Thiết diện (hay mặt cắt) của một hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng (P) là phần chung của hình chóp và mặt phẳng (P). Thông thường, thiết diện là một đa giác phẳng. Các đỉnh của đa giác này là giao điểm của mặt phẳng (P) với các cạnh của hình chóp. Các cạnh của đa giác là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp.

2. Tính chất

- Thiết diện là một đa giác phẳng, khép kín.
- Số cạnh của thiết diện không bao giờ lớn hơn số mặt của hình chóp.
- Các cạnh của thiết diện nằm trên các mặt của hình chóp.

II. Các phương pháp xác định thiết diện

Để xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P), ta cần tìm các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp cho đến khi chúng tạo thành một đa giác khép kín.

Phương pháp 1: Tìm giao tuyến trực tiếp

Đây là phương pháp cơ bản nhất, dựa trên việc tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) với lần lượt các mặt của hình chóp.

Nguyên tắc:

1. Xác định một giao tuyến có sẵn của mặt phẳng (P) với một mặt nào đó của hình chóp (thường là mặt đáy). Giao tuyến này được xác định bởi hai điểm chung hoặc một điểm chung và một phương song song.
2. Kéo dài giao tuyến vừa tìm được để nó cắt các cạnh của mặt đó. Các giao điểm này chính là các đỉnh của thiết diện.
3. Lần lượt xét giao tuyến của (P) với các mặt bên. Khi đã có một điểm chung (đỉnh của thiết diện), ta cần tìm thêm một điểm chung nữa để xác định giao tuyến.
4. Lặp lại quá trình cho đến khi các đoạn giao tuyến nối lại tạo thành một đa giác khép kín. Đa giác này chính là thiết diện cần tìm.

Ví dụ 1:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Lấy điểm P trên cạnh SC sao cho $SP = 2PC$. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Giải:

- **Bước 1:** Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt bên đã chứa các điểm M, N, P. Ta có các đoạn MN, NP là các cạnh của thiết diện.
 - Trong (SAB), MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$.
 - Vì $AB \parallel CD$ nên $MN \parallel CD$.
- **Bước 2:** Tìm giao tuyến của (MNP) với mặt (SCD). Ta có:
 - P là điểm chung.

- $MN \subset (MNP)$ và $CD \subset (SCD)$.
- Vì $MN \parallel CD$ nên giao tuyến của (MNP) và (SCD) là đường thẳng đi qua P và song song với CD (và MN).
- Trong mặt phẳng (SCD) , kẻ đường thẳng $Px \parallel CD$, cắt SD tại Q. Khi đó, PQ là giao tuyến cần tìm.

- **Bước 3:** Hoàn thành thiết diện. Nối Q và M (cùng thuộc mặt phẳng (SAD)).
- **Kết luận:** Các đoạn giao tuyến MN, NP, PQ, QM khép kín tạo thành tứ giác MNPQ. Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MNPQ. Vì $MN \parallel PQ$ (cùng song song CD) nên MNPQ là hình thang.

Phương pháp 2: Mở rộng mặt phẳng cắt

Khi các điểm đã cho không đủ để xác định giao tuyến với tất cả các mặt, ta cần mở rộng mặt phẳng (P) bằng cách tìm thêm các điểm mới thuộc (P).

Nguyên tắc:

1. Chọn một mặt phẳng phụ (thường là một mặt của hình chóp) chứa một đường thẳng a của mặt phẳng cắt (P).
2. Tìm giao điểm của đường thẳng a với một đường thẳng b nào đó nằm trong mặt phẳng phụ đó. Giao điểm này sẽ là một điểm mới thuộc mặt phẳng (P).
3. Nối điểm mới này với một điểm đã có của (P) để tạo ra giao tuyến mới. Giao tuyến này sẽ giúp ta tìm thêm các đỉnh mới của thiết diện.
4. Lặp lại quá trình cho đến khi tìm được đa giác khép kín.

Ví dụ 2:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .
Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Giải:

- **Bước 1:** Ta có sẵn hai cạnh của thiết diện là AB và AM, BM .
 - Giao tuyến của (ABM) với (ABCD) là AB .
 - Giao tuyến của (ABM) với (SBC) là BM .
 - Giao tuyến của (ABM) với (SAC) là AM .
- **Bước 2:** Mở rộng mặt phẳng (ABM) để tìm giao tuyến với (SCD) và (SAD).
 - Trong mặt phẳng (ABCD), $AB \parallel CD$.
 - Mặt phẳng (ABM) chứa AB . Mặt phẳng (SCD) chứa CD .
 - Do đó, giao tuyến của (ABM) và (SCD) là đường thẳng đi qua M và song song với AB (và CD).
 - Trong mặt phẳng (SCD), kẻ đường thẳng qua M và song song với CD , cắt SD tại N .
- **Bước 3:** Hoàn thành thiết diện.
 - Ta có N là điểm chung của (ABM) và (SAD).
 - A cũng là điểm chung của (ABM) và (SAD).
 - Vậy giao tuyến của (ABM) với (SAD) là đường thẳng AN .
- **Kết luận:** Các đoạn giao tuyến AB, BM, MN, NA khép kín tạo thành tứ giác $ABMN$. Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $ABMN$. Do $MN \parallel AB$ nên $ABMN$ là hình thang.

III. Một số trường hợp đặc biệt

Việc xác định thiết diện trở nên đơn giản hơn khi mặt phẳng cắt song song với một yếu tố nào đó của hình chóp.

Trường hợp mặt phẳng cắt (P)	Đặc điểm của thiết diện
(P) song song với mặt đáy (ABCD)	Thiết diện là một đa giác đồng dạng với đa giác đáy.
(P) song song với một cạnh bên (ví dụ SA)	Giao tuyến của (P) với các mặt chứa SA (ví dụ (SAB), (SAD)) sẽ song song với SA.
(P) đi qua một đỉnh và cắt mặt đối diện	Thiết diện là một tam giác.

1. Thiết diện song song với mặt đáy

Tính chất: Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt đáy của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và cắt các cạnh bên $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ lần lượt tại $B_1, B_2, ..., B_n$ thì thiết diện $B_1B_2...B_n$ là một đa giác đồng dạng với đa giác đáy $A_1A_2...A_n$.

Ví dụ 3:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Một mặt phẳng (P) song song với (ABCD) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $SM/SA = k$ ($0 < k < 1$). Chứng minh MNPQ là hình vuông và tính diện tích của nó.

Giải:

- Vì $(P) \parallel (ABCD)$ nên $(P) \parallel AB$ và $(P) \parallel BC$.
- (P) cắt (SAB) theo giao tuyến MN . Vì $(P) \parallel AB$ nên $MN \parallel AB$.
- (P) cắt (SBC) theo giao tuyến NP . Vì $(P) \parallel BC$ nên $NP \parallel BC$.
- Tương tự, $PQ \parallel CD$ và $QM \parallel DA$.
- Do $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$, $AB \perp BC$ nên $MN \parallel PQ$, $NP \parallel QM$, $MN \perp NP$. Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.
- Theo định lí Ta-lét trong tam giác SAB : $MN/AB = SM/SA = k \Rightarrow MN = k.a$.
- Tương tự trong tam giác SAD : $QM/AD = SM/SA = k \Rightarrow QM = k.a$.
- Vì $MN = QM = k.a$ nên hình chữ nhật $MNPQ$ là hình vuông.
- Diện tích hình vuông $MNPQ$ là: $S_{MNPQ} = MN^2 = (k.a)^2 = k^2 a^2$.

IV. Tổng kết và lưu ý khi làm bài

1. **Đọc kỹ đề bài:** Xác định rõ các yếu tố đã cho: các điểm thuộc mặt phẳng cắt, các quan hệ song song.
2. **Vẽ hình chính xác:** Hình vẽ rõ ràng, trực quan là yếu tố quan trọng nhất. Nên vẽ các đường khuất bằng nét đứt, các đường thấy bằng nét liền.
3. **Trình bày logic:** Nêu rõ các bước tìm giao tuyến. Ví dụ: "Xét hai mặt phẳng (P) và (SAB) , ta có...", "Giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng...".
4. **Kiểm tra tính khép kín:** Thiết diện phải là một đa giác khép kín. Sau khi tìm xong các đoạn giao tuyến, hãy đảm bảo chúng nối liền với nhau.
5. **Sử dụng linh hoạt các phương pháp:** Tùy vào bài toán mà kết hợp phương pháp tìm giao tuyến trực tiếp và phương pháp mở rộng mặt phẳng.

để đạt hiệu quả tốt nhất.

VIDOCU.COM