

I. Căn bậc hai số học

1. Định nghĩa

Với số thực không âm a , căn bậc hai số học của a là số x không âm sao cho x bình phương bằng a .

Kí hiệu: $\sqrt{a}$

Công thức: $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \{ x \geq 0; x^2 = a \}$

Giải thích:

- Số 0 có đúng một căn bậc hai số học là chính nó: $\sqrt{0} = 0$.
- Mọi số thực $a > 0$ đều có hai căn bậc hai là hai số đối nhau: $\sqrt{a}$ (căn bậc hai số học) và $-\sqrt{a}$.
- Số âm không có căn bậc hai thực.

Ví dụ minh họa:

- Căn bậc hai số học của 9 là 3, vì $3 \geq 0$ và $3^2 = 9$. Kí hiệu: $\sqrt{9} = 3$.
- Căn bậc hai số học của 0.25 là 0.5, vì $0.5 \geq 0$ và $0.5^2 = 0.25$. Kí hiệu: $\sqrt{0.25} = 0.5$.
- Số 16 có hai căn bậc hai là $\sqrt{16} = 4$ và $-\sqrt{16} = -4$.

2. So sánh các căn bậc hai số học

Với hai số a và b không âm, ta có mối liên hệ sau:

Công thức: Với $a \geq 0, b \geq 0$, ta có: $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Giải thích: Nếu số không âm a nhỏ hơn số không âm b thì căn bậc hai số học của a cũng nhỏ hơn căn bậc hai số học của b , và ngược lại.

Ví dụ minh họa:

1. So sánh 4 và $\sqrt{15}$. Ta có $4 = \sqrt{16}$. Vì $16 > 15$ nên $\sqrt{16} > \sqrt{15}$, suy ra $4 > \sqrt{15}$.
2. So sánh $\sqrt{7}$ và 3. Ta có $3 = \sqrt{9}$. Vì $7 < 9$ nên $\sqrt{7} < \sqrt{9}$, suy ra $\sqrt{7} < 3$.

II. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1. Căn thức bậc hai

Với A là một biểu thức đại số, $\sqrt{A}$ được gọi là căn thức bậc hai của A .

Điều kiện xác định: $\sqrt{A}$ có nghĩa (hay xác định) khi và chỉ khi $A \geq 0$.

Giải thích: Biểu thức dưới dấu căn phải luôn không âm.

Ví dụ minh họa:

1. Tìm x để căn thức $\sqrt{x - 2}$ có nghĩa.

Giải: Căn thức có nghĩa khi $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

2. Tìm x để căn thức $\sqrt{3 - x}$ có nghĩa.

Giải: Căn thức có nghĩa khi $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

3. Tìm x để căn thức $\sqrt{1 / (x+1)}$ có nghĩa.

Giải: Căn thức có nghĩa khi $1 / (x+1) \geq 0$. Vì $1 > 0$ nên điều kiện là $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

2. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Với mọi biểu thức A, ta có hằng đẳng thức quan trọng sau:

Công thức: $\sqrt{A^2} = |A|$

Giải thích: Căn bậc hai của bình phương một biểu thức bằng giá trị tuyệt đối của biểu thức đó.

Ta có: $|A| = A$ nếu $A \geq 0$ và $|A| = -A$ nếu $A < 0$.

Ví dụ minh họa:

1. Tính $\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$.

Giải: $\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = |\sqrt{5} - 2|$. Vì $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ nên $\sqrt{5} - 2 > 0$. Do đó, $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$.

2. Tính $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2}$.

Giải: $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} = |3 - \sqrt{10}|$. Vì $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$ nên $3 - \sqrt{10} < 0$. Do đó, $|3 - \sqrt{10}| = -(3 - \sqrt{10}) = \sqrt{10} - 3$.

3. Rút gọn $\sqrt{(x-5)^2}$ với $x \geq 5$.

Giải: $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$. Vì $x \geq 5$ nên $x-5 \geq 0$. Do đó, $|x-5| = x-5$.

III. Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương

1. Khai phương một tích

Công thức (Quy tắc): Với $A \geq 0, B \geq 0$, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

Giải thích: Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Ví dụ minh họa:

1. Tính $\sqrt{144}$.

Giải: $\sqrt{144} = \sqrt{(9 \cdot 16)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$.

2. Tính $\sqrt{49 \cdot 25 \cdot 64}$.

Giải: $\sqrt{49 \cdot 25 \cdot 64} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 7 \cdot 5 \cdot 8 = 280$.

2. Nhân các căn thức bậc hai

Công thức (Quy tắc): Với $A \geq 0, B \geq 0$, ta có: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{(A \cdot B)}$

Giải thích: Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Ví dụ minh họa:

1. Tính $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$.

Giải: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{(5 \cdot 20)} = \sqrt{100} = 10$.

2. Tính $\sqrt{1.2} \cdot \sqrt{30}$.

Giải: $\sqrt{1.2} \cdot \sqrt{30} = \sqrt{(1.2 \cdot 30)} = \sqrt{36} = 6$.

3. Khai phương một thương

Công thức (Quy tắc): Với $A \geq 0, B > 0$, ta có: $\sqrt{(A/B)} = \sqrt{A} / \sqrt{B}$

Giải thích: Muốn khai phương một thương A/B , trong đó A không âm và B dương, ta có thể lần lượt khai phương A và B , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

Ví dụ minh họa:

1. Tính $\sqrt{(81/121)}$.

Giải: $\sqrt{(81/121)} = \sqrt{81} / \sqrt{121} = 9 / 11$.

2. Tính $\sqrt{(144/25)}$.

Giải: $\sqrt{(144/25)} = \sqrt{144} / \sqrt{25} = 12 / 5$.

4. Chia hai căn thức bậc hai

Công thức (Quy tắc): Với $A \geq 0, B > 0$, ta có: $\sqrt{A} / \sqrt{B} = \sqrt{(A/B)}$

Giải thích: Muốn chia căn bậc hai của số A không âm cho căn bậc hai của số B dương, ta có thể chia A cho B rồi khai phương kết quả đó.

Ví dụ minh họa:

1. Tính $\sqrt{999} / \sqrt{111}$.

Giải: $\sqrt{999} / \sqrt{111} = \sqrt{(999/111)} = \sqrt{9} = 3$.

2. Tính $\sqrt{52} / \sqrt{117}$.

Giải: $\sqrt{52} / \sqrt{117} = \sqrt{(52/117)} = \sqrt{(4/9)} = 2/3$.

IV. Các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Công thức: $\sqrt{(A^2 \cdot B)} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$)

Giải thích: Nếu một thừa số của biểu thức dưới dấu căn là bình phương của một số hoặc một biểu thức, ta có thể đưa thừa số đó ra ngoài dấu căn.

Ví dụ minh họa:

1. Rút gọn $\sqrt{20}$.

Giải: $\sqrt{20} = \sqrt{(4 \cdot 5)} = \sqrt{(2^2 \cdot 5)} = 2\sqrt{5}$.

2. Rút gọn $2\sqrt{72}$.

Giải: $2\sqrt{72} = 2\sqrt{(36 \cdot 2)} = 2\sqrt{(6^2 \cdot 2)} = 2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

3. Rút gọn $\sqrt{(x^3y)}$ với $x \geq 0, y \geq 0$.

Giải: $\sqrt{(x^3y)} = \sqrt{(x^2 \cdot xy)} = |x|\sqrt{(xy)} = x\sqrt{(xy)}$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Công thức:

- $A\sqrt{B} = \sqrt{(A^2 \cdot B)}$ nếu $A \geq 0, B \geq 0$

- $A\sqrt{B} = -\sqrt{(A^2 \cdot B)}$ nếu $A < 0, B \geq 0$

Giải thích: Để đưa một thừa số không âm vào trong dấu căn, ta bình phương thừa số đó rồi nhân với biểu thức trong căn. Nếu thừa số là âm, ta để dấu "-" ở ngoài và chỉ đưa phần số dương vào trong.

Ví dụ minh họa:

1. Đưa thừa số vào trong dấu căn: $5\sqrt{3}$.

Giải: Vì $5 > 0$, $5\sqrt{3} = \sqrt{(5^2 \cdot 3)} = \sqrt{75}$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn: $-4\sqrt{2}$.

Giải: Vì $-4 < 0$, $-4\sqrt{2} = -\sqrt{(4^2 \cdot 2)} = -\sqrt{32}$.

3. So sánh $3\sqrt{7}$ và $\sqrt{28}$.

Giải: $3\sqrt{7} = \sqrt{(3^2 \cdot 7)} = \sqrt{63}$. Vì $63 > 28$ nên $\sqrt{63} > \sqrt{28}$, suy ra $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Công thức: $\sqrt{A/B} = \sqrt{A \cdot B} / |B|$ (với $A \cdot B \geq 0$ và $B \neq 0$)

Giải thích: Để khử mẫu của biểu thức lấy căn, ta nhân cả tử và mẫu của biểu thức trong căn với chính mẫu, sau đó áp dụng quy tắc khai phương một thương.

Ví dụ minh họa:

1. Khử mẫu của $\sqrt{3/7}$.

Giải: $\sqrt{3/7} = \sqrt{3 \cdot 7 / 7^2} = \sqrt{21} / \sqrt{7^2} = \sqrt{21} / 7$.

2. Khử mẫu của $\sqrt{5 / 2a}$ với $a > 0$.

Giải: $\sqrt{5 / 2a} = \sqrt{5 \cdot 2a / (2a)^2} = \sqrt{10a} / |2a| = \sqrt{10a} / 2a$.

4. Trục căn thức ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu là phép biến đổi làm cho mẫu số không còn chứa dấu căn.

Các trường hợp thường gặp:

Dạng mẫu	Biểu thức liên hợp	Công thức	Ví dụ
$\sqrt{B}$	$\sqrt{B}$	$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$)	$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3}.\sqrt{3})} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$\frac{C}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{(A-B)}$	$\frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{((\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2)} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$
$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\frac{C}{(\sqrt{A}-\sqrt{B})} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{(A-B)}$	$\frac{4}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(7-3)} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$
$A + \sqrt{B}$	$A - \sqrt{B}$	$\frac{C}{(A+\sqrt{B})} = \frac{C(A-\sqrt{B})}{(A^2-B)}$	$\frac{6}{(3+\sqrt{3})} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{(9-3)} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{6} = 3-\sqrt{3}$

V. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta phối hợp các phép biến đổi đã học như: đưa thừa số ra ngoài/vào trong dấu căn, trục căn thức ở mẫu, sử dụng hằng đẳng thức, quy đồng mẫu số và cộng, trừ các căn thức đồng dạng (các căn thức có cùng biểu thức dưới dấu căn).

Các bước cơ bản:

1. Phân tích các số dưới dấu căn thành tích các thừa số chính phương.
2. Áp dụng các quy tắc khai phương, đưa thừa số ra ngoài dấu căn để có các căn thức đồng dạng.
3. Thực hiện các phép cộng, trừ các căn thức đồng dạng.

4. Nếu biểu thức có dạng phân thức, tiến hành trục căn thức ở mẫu hoặc quy đồng mẫu số.

Ví dụ minh họa:

1. Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + \sqrt{48}$.

Giải:

$$A = 2\sqrt{(4.3)} - 3\sqrt{(9.3)} + \sqrt{(16.3)}$$

$$A = 2.2\sqrt{3} - 3.3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$A = 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$A = (4 - 9 + 4)\sqrt{3} = -\sqrt{3}.$$

2. Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{(1-\sqrt{3})} \right) : \frac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$.

Giải:

Ta rút gọn từng phân thức:

$$\frac{(\sqrt{14}-\sqrt{7})}{(1-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{-(\sqrt{2}-1)} = -\sqrt{7}.$$

$$\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{-(\sqrt{3}-1)} = -\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } B = (-\sqrt{7} - \sqrt{5}) : \frac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$B = -(\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

$$B = -((\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2) = -(7 - 5) = -2.$$

VI. Căn bậc ba

1. Định nghĩa

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

Kí hiệu: $\sqrt[3]{a}$

Công thức: $x = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow x^3 = a$

Giải thích:

- Mọi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.
- Căn bậc ba của số dương là số dương.
- Căn bậc ba của số âm là số âm.
- Căn bậc ba của số 0 là 0.

Ví dụ minh họa:

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ (vì $2^3 = 8$).
2. $\sqrt[3]{(-27)} = -3$ (vì $(-3)^3 = -27$).
3. $\sqrt[3]{125} = 5$ (vì $5^3 = 125$).

2. Tính chất

Căn bậc ba có các tính chất tương tự căn bậc hai:

- **So sánh:** Với mọi số thực a, b : $a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$
- **Nhân, chia:**
 - $\sqrt[3]{(a \cdot b)} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
 - $\sqrt[3]{(a/b)} = \sqrt[3]{a} / \sqrt[3]{b}$ (với $b \neq 0$)

Ví dụ minh họa:

1. So sánh 2 và $\sqrt[3]{7}$.

Giải: Ta có $2 = \sqrt[3]{8}$. Vì $8 > 7$ nên $\sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{7}$, suy ra $2 > \sqrt[3]{7}$.

2. Tính $\sqrt[3]{135} / \sqrt[3]{5}$.

Giải: $\sqrt[3]{135} / \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(135/5)} = \sqrt[3]{27} = 3$.