

Tổng quan về ứng dụng tích phân tính thể tích khối tròn xoay

Trong chương trình Giải tích lớp 12, một trong những ứng dụng quan trọng của tích phân là tính thể tích của vật thể, đặc biệt là khối tròn xoay. Khối tròn xoay được tạo thành khi ta quay một hình phẳng quanh một trục cố định. Bài viết này sẽ tập trung vào các dạng toán tính thể tích khối tròn xoay quanh trục Ox của những hình phẳng có cấu trúc phức tạp, thường là giới hạn bởi hai đường cong.

1. Ôn tập kiến thức cơ bản: Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong

Trước khi đi vào các dạng phức tạp, chúng ta cần nắm vững công thức cơ bản.

Công thức

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ (liên tục trên $[a, b]$), trục Ox ($y=0$), và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi quay hình (H) quanh trục Ox, ta được một khối tròn xoay có thể tích V được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Giải thích

Công thức này được xây dựng dựa trên 'phương pháp đĩa cắt' (Disk Method). Ta chia đoạn $[a, b]$ thành nhiều đoạn con rất nhỏ. Trên mỗi đoạn con có độ dài dx , ta xem $f(x)$ như hằng số. Khi đó, phần hình phẳng tương ứng sẽ tạo ra một hình trụ (đĩa cắt) rất mỏng có bán kính đáy là $R = |f(x)|$ và chiều cao là dx . Thể tích

của đĩa cắt này là $dV = \pi R^2 h = \pi [f(x)]^2 dx$. Lấy tổng thể tích của tất cả các đĩa cắt này bằng phép toán tích phân, ta được công thức trên.

Ví dụ minh họa

- **Ví dụ 1:** Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục Ox, $x = 0$ và $x = 2$ quanh trục Ox.

- **Giải:**

Áp dụng công thức cơ bản, ta có:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$V = \pi [x^5/5] \big|_0^2 = \pi (2^5/5 - 0^5/5) = 32\pi/5 \text{ (đvtt)}.$$

- **Ví dụ 2:** Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sin(x)$, trục Ox, $x = 0$ và $x = \pi$ quanh trục Ox.

- **Giải:**

Áp dụng công thức, ta có:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2(x) dx$$

Sử dụng công thức hạ bậc: $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$

$$V = \pi \int_0^\pi (1/2 - (\cos(2x))/2) dx$$

$$V = \pi [x/2 - (\sin(2x))/4] \big|_0^\pi = \pi [(\pi/2 - 0) - (0 - 0)] = \pi^2/2 \text{ (đvtt)}.$$

2. Dạng toán chính: Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Đây là dạng toán phức tạp và phổ biến nhất. Hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Công thức

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (liên tục và cùng dấu trên $[a, b]$, giả sử $f(x) \geq g(x) \geq 0$), và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi quay hình (H) quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay có thể tích V được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b |[f(x)]^2 - [g(x)]^2| dx$$

Hoặc nếu đã xác định $f(x)$ là đường cong nằm trên (xa trục Ox hơn) và $g(x)$ là đường cong nằm dưới (gần trục Ox hơn):

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Giải thích

Công thức này dựa trên 'phương pháp vòng đệm' (Washer Method). Thể tích cần tính bằng thể tích của khối tròn xoay tạo bởi đường cong 'ngoài' ($y = f(x)$) trừ đi thể tích của khối tròn xoay tạo bởi đường cong 'trong' ($y = g(x)$).

- Thể tích khối lớn (tạo bởi $f(x)$): $V_1 = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- Thể tích khối rỗng bên trong (tạo bởi $g(x)$): $V_2 = \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$
- Thể tích cần tìm: $V = V_1 - V_2 = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$

Các bước giải toán

1. **Bước 1:** Lập phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ để tìm các cận tích phân a, b (nếu đề bài chưa cho).
2. **Bước 2:** Xác định trên đoạn $[a, b]$, đồ thị nào nằm trên (có giá trị y lớn hơn), đồ thị nào nằm dưới. Điều này quan trọng để đảm bảo $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 \geq 0$.

3. **Bước 3:** Áp dụng công thức $V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$ để tính thể tích.

Ví dụ minh họa

- **Ví dụ 1:** Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox .

- **Giải:**

Bước 1: Tìm cận. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x}$ (với $x \geq 0$) $\Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0$. Ta có $x = 0$ hoặc $x = 1$. Vậy cận tích phân là $a = 0$, $b = 1$.

Bước 2: So sánh hai hàm. Trên đoạn $[0, 1]$, chọn $x = 1/4$, ta có $(1/4)^2 = 1/16$ và $\sqrt{1/4} = 1/2$. Do $1/2 > 1/16$ nên $\sqrt{x} \geq x^2$ trên $[0, 1]$. Vậy $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = x^2$.

Bước 3: Tính tích phân.

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$V = \pi [x^2/2 - x^5/5] \Big|_0^1 = \pi [(1/2 - 1/5) - (0 - 0)] = \pi (3/10) = 3\pi/10 \text{ (đvtt)}.$$

- **Ví dụ 2:** Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = 1$ quanh trục Ox .

- **Giải:**

Bước 1: Tìm cận. Phương trình hoành độ giao điểm: $2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$. Vậy $a = -1$, $b = 1$.

Bước 2: So sánh hai hàm. Trên đoạn $[-1, 1]$, chọn $x = 0$, ta có $2 - 0^2 = 2$ và $y = 1$. Do $2 > 1$ nên $2 - x^2 \geq 1$. Vậy $f(x) = 2 - x^2$ và $g(x) = 1$.

Bước 3: Tính tích phân.

$$V = \pi \int_{-1}^1 [(2 - x^2)^2 - 1^2] dx = \pi \int_{-1}^1 (4 - 4x^2 + x^4 - 1) dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 3) dx$$

$$V = \pi [x^5/5 - 4x^3/3 + 3x] \Big|_{-1}^1$$

$$V = \pi [(1/5 - 4/3 + 3) - (-1/5 + 4/3 - 3)] = \pi [2(1/5 - 4/3 + 3)] = \pi [2((3 - 20 + 45)/15)] = 56\pi/15 \text{ (đvtt)}.$$

3. Các lưu ý quan trọng và lỗi sai thường gặp

Việc áp dụng công thức đôi khi không đơn giản và học sinh thường mắc phải những lỗi cơ bản. Dưới đây là một số điểm cần lưu ý.

Lỗi sai 1: Nhầm lẫn giữa $[f(x)]^2 - [g(x)]^2$ và $[f(x) - g(x)]^2$

Đây là lỗi sai nghiêm trọng và phổ biến nhất. Công thức đúng xuất phát từ việc trừ thể tích, không phải trừ hàm số rồi mới bình phương.

Công thức ĐÚNG	Công thức SAI
$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$ (Hiệu của hai bình phương)	$V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ (Bình phương của một hiệu)
<i>Ý nghĩa:</i> Lấy thể tích khối lớn trừ đi thể tích khối nhỏ.	<i>Ý nghĩa:</i> Tính thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$. Đây là một bài toán hoàn toàn khác.

Lưu ý 2: Trường hợp phải chia miền tính tích phân

Trong một số trường hợp, vai trò của đường cong 'trên' và 'dưới' có thể thay đổi. Khi đó, ta phải chia bài toán thành nhiều phần nhỏ.

- **Ví dụ:** Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x$, $y = 2 - x$ và trục Ox quanh trục Ox .
- **Phân tích:** Hai đường thẳng $y = x$ và $y = 2 - x$ cắt nhau tại điểm $x = 1$.
 - Trên đoạn $[0, 1]$, hình phẳng bị giới hạn bởi $y = x$ và trục Ox .
 - Trên đoạn $[1, 2]$, hình phẳng bị giới hạn bởi $y = 2 - x$ và trục Ox .

• **Giải:**

Ta phải tách thành hai tích phân:

$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi [x^3/3] \big|_0^1 = \pi/3$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2 - x)^2 dx = -\pi [(2 - x)^3/3] \big|_1^2 = -\pi [0 - 1/3] = \pi/3$$

$$\text{Tổng thể tích: } V = \pi/3 + \pi/3 = 2\pi/3 \text{ (đvtt).}$$

Lưu ý 3: Xác định cận tích phân

Nếu đề bài không cho sẵn cận $x = a$, $x = b$, thì cận chính là hoành độ giao điểm của các đường cong giới hạn hình phẳng. Bạn phải giải phương trình để tìm chúng. Đôi khi, một trong các cận có thể là giao điểm với trục tung ($x=0$).