

Chuyên đề: Độ dài đường tròn, Cung tròn - Diện tích hình tròn, Hình quạt tròn

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Công thức tính độ dài (chu vi) đường tròn

Độ dài đường tròn, hay còn gọi là chu vi hình tròn, được ký hiệu là C . Nó là độ dài đường biên giới hạn hình tròn đó.

- Công thức theo bán kính R : $C = 2\pi R$
- Công thức theo đường kính d : $C = \pi d$

Trong đó:

- C là độ dài (chu vi) của đường tròn.
- R là bán kính của đường tròn.
- d là đường kính của đường tròn ($d = 2R$).
- π (pi) là hằng số, $\pi \approx 3,14$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính chu vi của một hình tròn có bán kính $R = 5$ cm.

Lời giải:

Áp dụng công thức $C = 2\pi R$, ta có:

$$C = 2 * \pi * 5 = 10\pi \text{ (cm)}$$

Nếu lấy $\pi \approx 3,14$ thì $C \approx 10 * 3,14 = 31,4 \text{ (cm)}$.

2. **Ví dụ 2:** Một bánh xe đạp có đường kính là 65 cm. Tính quãng đường bánh xe đi được khi nó lăn 100 vòng.

Lời giải:

Chu vi của bánh xe là: $C = \pi d = \pi * 65 = 65\pi \text{ (cm)}$.

Quãng đường bánh xe đi được sau 100 vòng chính là 100 lần chu vi của nó:

$$\text{Quãng đường} = 100 * C = 100 * 65\pi = 6500\pi \text{ (cm)} \approx 20410 \text{ cm} \approx 204,1 \text{ m}.$$

2. Công thức tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung n° được tính theo công thức:

$$l = (\pi R n) / 180$$

Trong đó:

- l là độ dài cung tròn.
- R là bán kính của đường tròn chứa cung đó.
- n là số đo của cung tròn (tính bằng độ).
- π (pi) là hằng số, $\pi \approx 3,14$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính độ dài cung tròn 60° của một đường tròn có bán kính 10 cm.

Lời giải:

Áp dụng công thức $l = (\pi R n) / 180$, ta có:

$$l = (\pi * 10 * 60) / 180 = 600\pi / 180 = 10\pi/3 \text{ (cm)}.$$

2. **Ví dụ 2:** Một đường tròn có bán kính $R = 20$ cm. Tìm số đo n của cung tròn có độ dài là 5π cm.

Lời giải:

Từ công thức $l = (\pi R n) / 180$, ta suy ra $n = (180 * l) / (\pi R)$.

Thay số vào, ta có: $n = (180 * 5\pi) / (\pi * 20) = 900\pi / 20\pi = 45$.

Vậy số đo của cung tròn đó là 45° .

3. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích của hình tròn bán kính R được ký hiệu là S và được tính theo công thức:

$$S = \pi R^2$$

Trong đó:

- **S** là diện tích hình tròn.
- **R** là bán kính của hình tròn.
- **π** (pi) là hằng số, $\pi \approx 3,14$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích một mặt bàn hình tròn có bán kính 40 cm.

Lời giải:

Áp dụng công thức $S = \pi R^2$, ta có:

$$S = \pi * 40^2 = 1600\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2. **Ví dụ 2:** Tính bán kính của một hình tròn biết diện tích của nó là $36\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = \pi R^2 = 36\pi.$$

$$\text{Suy ra } R^2 = 36.$$

$$\text{Vì } R > 0 \text{ nên } R = 6 \text{ (cm)}.$$

4. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Hình quạt tròn là một phần của hình tròn được giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức:

$$S_{\text{quạt}} = (\pi R^2 n) / 360$$

Hoặc có thể tính theo độ dài cung l :

$$S_{\text{quạt}} = (l * R) / 2$$

Trong đó:

- **$S_{\text{quạt}}$** là diện tích hình quạt tròn.
- **R** là bán kính của hình quạt.
- **n** là số đo cung tròn của hình quạt (tính bằng độ).
- **l** là độ dài cung tròn của hình quạt.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính 6 cm và số đo cung là 30°.

Lời giải:

Áp dụng công thức $S_{\text{quạt}} = (\pi R^2 n) / 360$, ta có:

$$S_{\text{quạt}} = (\pi * 6^2 * 30) / 360 = (\pi * 36 * 30) / 360 = 3\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2. **Ví dụ 2:** Tính diện tích một hình quạt tròn biết bán kính là 4 cm và độ dài cung tròn tương ứng là 6 cm.

Lời giải:

Áp dụng công thức $S_{\text{quạt}} = (l * R) / 2$, ta có:

$$S_{\text{quạt}} = (6 * 4) / 2 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

5. Bảng tổng hợp công thức

Đại lượng	Công thức	Ghi chú
Độ dài (chu vi) đường tròn	$C = 2\pi R = \pi d$	R là bán kính, d là đường kính
Độ dài cung tròn n°	$l = (\pi R n) / 180$	n là số đo cung (độ)
Diện tích hình tròn	$S = \pi R^2$	R là bán kính
Diện tích hình quạt tròn n°	$S_{\text{quạt}} = (\pi R^2 n) / 360 = (l * R) / 2$	n là số đo cung, l là độ dài cung

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tính độ dài đường tròn, độ dài cung tròn

Phương pháp: Áp dụng trực tiếp các công thức $C = 2\pi R$ và $l = (\pi R n) / 180$. Cần xác định đúng các đại lượng đã cho (R, d, n) và đại lượng cần tìm (C, l) để áp dụng công thức phù hợp.

Bài tập ví dụ:

Bài 1: Cho đường tròn (O) có bán kính 15 cm.

- a) Tính chu vi của đường tròn.
- b) Tính độ dài cung tròn có số đo 90° .

Lời giải:

a) Chu vi của đường tròn là:

$$C = 2\pi R = 2 * \pi * 15 = 30\pi \text{ (cm)}.$$

b) Độ dài cung tròn 90° là:

$$l = (\pi R n) / 180 = (\pi * 15 * 90) / 180 = 7.5\pi \text{ (cm)}.$$

Bài 2: Vành của một chiếc nón lá có dạng một đường tròn. Người ta đo được chu vi của vành nón là 125.6 cm. Hỏi bán kính của vành nón là bao nhiêu (lấy $\pi \approx 3,14$)?

Lời giải:

Từ công thức $C = 2\pi R$, ta suy ra $R = C / (2\pi)$.

Thay số vào, ta có: $R = 125.6 / (2 * 3,14) = 125.6 / 6.28 = 20 \text{ (cm)}$.

Vậy bán kính của vành nón là 20 cm.

Dạng 2: Tính diện tích hình tròn, diện tích hình quạt tròn

Phương pháp: Áp dụng trực tiếp các công thức $S = \pi R^2$ và $S_{\text{quạt}} = (\pi R^2 n) / 360 = (l * R) / 2$. Lưu ý chọn công thức tính diện tích hình quạt phù hợp với dữ kiện bài toán cho (cho n hay cho l).

Bài tập ví dụ:

Bài 1: Tính diện tích của một hình tròn ngoại tiếp một hình vuông có cạnh là 8 cm.

Lời giải:

Đường chéo của hình vuông chính là đường kính của hình tròn ngoại tiếp. Độ dài đường chéo hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$.

Đường kính $d = 8\sqrt{2}$ cm.

Bán kính của hình tròn là $R = d/2 = 4\sqrt{2}$ cm.

Diện tích của hình tròn là:

$$S = \pi R^2 = \pi * (4\sqrt{2})^2 = \pi * (16 * 2) = 32\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 2: Một cái bánh pizza hình tròn có bán kính 15 cm được cắt thành 8 miếng bằng nhau. Tính diện tích của một miếng bánh.

Lời giải:

Mỗi miếng bánh là một hình quạt tròn.

Vì bánh được cắt thành 8 miếng bằng nhau nên số đo cung của mỗi miếng là $n = 360^\circ / 8 = 45^\circ$.

Diện tích của một miếng bánh là:

$$S_{\text{quạt}} = (\pi R^2 n) / 360 = (\pi * 15^2 * 45) / 360 = (\pi * 225 * 45) / 360 = 28.125\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Dạng 3: Bài toán tổng hợp

Phương pháp: Đây là dạng bài kết hợp nhiều kiến thức. Cần đọc kỹ đề, phân tích các yếu tố đã biết và yếu tố cần tìm. Có thể phải sử dụng các định lý, hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc tính chất của các hình khác để tìm ra bán kính R hoặc số đo cung n trước khi áp dụng công thức.

Bài tập ví dụ:

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC.

a) Tính diện tích hình tròn (O).

b) Vẽ cung tròn tâm A, bán kính AB. Tính diện tích phần nằm ngoài tam giác ABC và bên trong cung tròn vừa vẽ.

Lời giải:

a) Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng định lý Pytago:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

Suy ra $BC = 10 \text{ cm}$.

Đường tròn (O) có đường kính $BC = 10 \text{ cm}$, vậy bán kính $R = BC/2 = 5 \text{ cm}$.

Diện tích hình tròn (O) là $S = \pi R^2 = \pi * 5^2 = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Cung tròn tâm A, bán kính $AB = 6 \text{ cm}$, là một phần của hình tròn (A; 6cm). Vì tam giác ABC vuông tại A nên góc $BAC = 90^\circ$. Đây chính là góc ở tâm của hình quạt tròn tạo bởi cung tròn đó.

Diện tích hình quạt tròn tâm A, bán kính AB là:

$$S_{\text{quạt}} = (\pi * AB^2 * 90) / 360 = (\pi * 6^2 * 90) / 360 = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\text{ABC}} = (1/2) * AB * AC = (1/2) * 6 * 8 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích phần cần tính bằng diện tích hình quạt trừ đi diện tích tam giác ABC:

$$S_{\text{cần tính}} = S_{\text{quạt}} - S_{\text{ABC}} = (9\pi - 24) \text{ (cm}^2\text{)}.$$