

I. Lý thuyết cơ bản về ứng dụng tích phân tính diện tích

Ý nghĩa hình học của tích phân xác định là cơ sở để xây dựng các công thức tính diện tích hình phẳng. Nếu hàm số **$f(x)$** liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Từ đó, ta tổng quát hóa cho các trường hợp phức tạp hơn.

II. Các dạng toán tính diện tích hình phẳng

Dạng 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành ($y=0$), và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Đây là dạng bài cơ bản nhất, áp dụng trực tiếp ý nghĩa hình học của tích phân.

- **Công thức tổng quát:** $S = \int_a^b |f(x)| dx$
- **Giải thích:** Vì diện tích không thể âm, ta phải lấy giá trị tuyệt đối của hàm số $f(x)$. Để tính tích phân này, ta cần xét dấu của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ để phá dấu giá trị tuyệt đối.

Phương pháp giải:

1. Giải phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $[a, b]$ để tìm các nghiệm $c_1, c_2, \dots$ (nếu có).
2. Chia đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ hơn dựa trên các nghiệm vừa tìm.
3. Trên mỗi đoạn nhỏ, $f(x)$ sẽ không đổi dấu. Ta xét dấu và phá trị tuyệt đối.

4. Tính tổng các tích phân trên từng đoạn nhỏ.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4$, trục Ox , và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

2. **Giải:**

Áp dụng công thức: $S = \int_0^3 |x^2 - 4| dx$.

Xét dấu $f(x) = x^2 - 4$ trên $[0, 3]$. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$. Trên đoạn $[0, 3]$, chỉ có nghiệm $x = 2$.

◦ Trên $[0, 2]$, $f(x) \leq 0$ nên $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4) = 4 - x^2$.

◦ Trên $[2, 3]$, $f(x) \geq 0$ nên $|x^2 - 4| = x^2 - 4$.

Do đó, ta tách tích phân:

$$S = \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx$$

$$S = [4x - x^3/3] \Big|_0^2 + [x^3/3 - 4x] \Big|_2^3$$

$$S = ((8 - 8/3) - 0) + ((9 - 12) - (8/3 - 8)) = 16/3 + 7/3 = 23/3 \text{ (đvdt)}.$$

3. **Ví dụ 2:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \cos(x)$, trục Ox , $x = 0$ và $x = \pi$.

4. **Giải:**

$$S = \int_0^\pi |\cos(x)| dx.$$

Trên $[0, \pi]$, phương trình $\cos(x) = 0$ có nghiệm $x = \pi/2$.

◦ Trên $[0, \pi/2]$, $\cos(x) \geq 0$.

◦ Trên $[\pi/2, \pi]$, $\cos(x) \leq 0$.

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi -\cos(x) dx$$

$$S = [\sin(x)] \Big|_0^{\pi/2} - [\sin(x)] \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$S = (\sin(\pi/2) - \sin(0)) - (\sin(\pi) - \sin(\pi/2)) = (1 - 0) - (0 - 1) = 2 \text{ (đvdt).}$$

Dạng 2: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Đây là trường hợp tổng quát hơn, diện tích hình phẳng là phần nằm giữa hai đồ thị.

- **Công thức tổng quát:** $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

- **Giải thích:** Diện tích được tính bằng tích phân của "khoảng cách" giữa hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Ta lấy giá trị tuyệt đối của hiệu hai hàm để đảm bảo diện tích luôn dương.

Phương pháp giải:

1. Lập hiệu $h(x) = f(x) - g(x)$.
2. Giải phương trình $h(x) = 0$ để tìm các giao điểm trên $[a, b]$.
3. Xét dấu của $h(x)$ trên các khoảng con để phá dấu giá trị tuyệt đối.
4. Tính tích phân.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$ và $y = -x + 2$, và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

2. **Giải:**

$$S = \int_0^1 |x^2 - (-x + 2)| dx = \int_0^1 |x^2 + x - 2| dx.$$

Xét dấu $h(x) = x^2 + x - 2$ trên $[0, 1]$. $h(x)$ có nghiệm $x = 1$ và $x = -2$.

Trên đoạn $[0, 1]$, $h(x) \leq 0$ (ví dụ thử $x = 0.5$, ta có $0.25 + 0.5 - 2 < 0$).

Vậy $|x^2 + x - 2| = -(x^2 + x - 2) = -x^2 - x + 2$.

$$S = \int_0^1 (-x^2 - x + 2) dx = [-x^3/3 - x^2/2 + 2x] \Big|_0^1$$

$$S = (-1/3 - 1/2 + 2) - 0 = 7/6 \text{ (đvdt)}.$$

Dạng 3: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (chưa cho cận)

Trong dạng này, các cận tích phân chính là hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

- **Công thức:** $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$, trong đó a, b là hai nghiệm liên tiếp nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

Phương pháp giải:

1. Lập phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x)$.
2. Giải phương trình để tìm tất cả các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$.
3. Cận tích phân sẽ là nghiệm nhỏ nhất và nghiệm lớn nhất (nếu hình phẳng là một miền kín duy nhất). Nếu có nhiều hơn 2 nghiệm, hình phẳng có thể được chia thành nhiều phần.
4. Áp dụng công thức như Dạng 2. Trên mỗi khoảng giữa hai nghiệm liên tiếp, hiệu $f(x) - g(x)$ thường không đổi dấu.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P): $y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng d: $y = x - 1$.

2. Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 4x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Vậy hai cận tích phân là $a = 1, b = 4$.

$$\text{Diện tích } S = \int_1^4 |(x^2 - 4x + 3) - (x - 1)| dx = \int_1^4 |x^2 - 5x + 4| dx.$$

Trên khoảng $(1, 4)$, tam thức $x^2 - 5x + 4 < 0$.

$$S = \int_1^4 -(x^2 - 5x + 4) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx$$

$$S = [-x^3/3 + 5x^2/2 - 4x] \Big|_1^4$$

$$S = (-64/3 + 40 - 16) - (-1/3 + 5/2 - 4) = 9/2 \text{ (đvdt)}.$$

3. Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3$ và $y = x$.

4. Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0, x = 1$.

Hình phẳng này gồm hai phần đối xứng nhau qua gốc tọa độ, trên các đoạn $[-1, 0]$ và $[0, 1]$.

$$S = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx.$$

◦ Trên $(-1, 0)$, $x^3 - x > 0$.

◦ Trên $(0, 1)$, $x^3 - x < 0$.

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$S = [x^4/4 - x^2/2] \Big|_{-1}^0 + [x^2/2 - x^4/4] \Big|_0^1$$

$$S = (0 - (1/4 - 1/2)) + ((1/2 - 1/4) - 0) = 1/4 + 1/4 = 1/2 \text{ (đvdt)}.$$

Dạng 4: Tính diện tích theo biến y

Đôi khi, việc biểu diễn x theo y và tính tích phân theo dy sẽ đơn giản hơn.

- **Công thức:** Hình phẳng giới hạn bởi $x = g(y)$, trục tung ($x=0$), $y = c$, $y = d$ có diện tích là $S = \int_c^d |g(y)| dy$.
- **Công thức tổng quát:** Hình phẳng giới hạn bởi $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$ có diện tích là $S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P): $y^2 = 4x$ và đường thẳng d: $y = 2x - 4$.

2. Giải:

Chuyển các hàm về dạng x theo y : (P): $x = y^2/4$ và d: $x = (y+4)/2$.

Phương trình tung độ giao điểm: $y^2/4 = (y+4)/2 \Leftrightarrow y^2 = 2y + 8 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ hoặc $y = 4$.

Vậy cận tích phân là $c = -2$, $d = 4$.

$$S = \int_{-2}^4 |(y+4)/2 - y^2/4| dy.$$

Trên $(-2, 4)$, $(y+4)/2 > y^2/4$.

$$S = \int_{-2}^4 (y/2 + 2 - y^2/4) dy$$

$$S = [y^2/4 + 2y - y^3/12] \Big|_{-2}^4$$

$$S = (4 + 8 - 64/12) - (1 - 4 + 8/12) = 9 \text{ (đvdt)}.$$

III. Lưu ý quan trọng khi giải toán

- **Vẽ đồ thị:** Luôn phác thảo đồ thị (nếu có thể) để hình dung rõ hình phẳng cần tính. Điều này giúp xác định đúng hàm nào nằm trên, hàm nào nằm dưới và các cận tích phân, tránh sai sót khi phá dấu giá trị tuyệt đối.

- **Sử dụng tính đối xứng:** Nếu hình phẳng có tính đối xứng (qua trục Ox , Oy hoặc gốc tọa độ), ta có thể tính diện tích một nửa rồi nhân đôi để phép tính đơn giản hơn.
- **Kiểm tra bằng máy tính cầm tay:** Đối với bài toán trắc nghiệm, có thể dùng chức năng tích phân của máy tính để thử và kiểm tra lại kết quả một cách nhanh chóng.

VIDOCU.COM