

Tổng hợp kiến thức: Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn toàn diện về tích vô hướng, một công cụ toán học mạnh mẽ trong hình học phẳng, giúp giải quyết nhiều bài toán liên quan đến góc và khoảng cách.

1. Góc giữa hai vectơ

Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ-không. Từ một điểm O bất kì, ta vẽ các vectơ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc AOB được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Kí hiệu: $(\vec{a}, \vec{b})$
- Quy ước: $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ thì hai vectơ cùng hướng.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ thì hai vectơ ngược hướng.

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC đều. Tính góc giữa $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

Giải: Góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ chính là góc BAC của tam giác. Vì tam

giác ABC đều nên góc $BAC = 60^\circ$. Vậy $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$.

2. **Ví dụ 2:** Cho hình vuông ABCD. Tính góc giữa $(\vec{AC}, \vec{BD})$.

Giải: Trong hình vuông, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Vậy $(\vec{AC}, \vec{BD}) = 90^\circ$.

2. Định nghĩa Tích vô hướng của hai vector

Công thức

Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số (một đại lượng vô hướng), được kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trong đó:

- $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ lần lượt là độ dài (mô-đun) của vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ là cosin của góc tạo bởi hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Trường hợp đặc biệt: Nếu một trong hai vector $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vector-không, ta quy ước tích vô hướng bằng 0.

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Giải: Ta có $|\vec{AB}| = a$, $|\vec{AC}| = a$ và $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$.

Áp dụng công thức, ta có:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = a \cdot a \cdot \cos(60^\circ) = a^2 \cdot (1/2) = a^2/2.$$

2. **Ví dụ 2:** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

Giải: Ta có $|\vec{AB}| = a$, $|\vec{AD}| = a$. Góc giữa $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$ là góc $BAD = 90^\circ$.

Vậy $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a \cdot a \cdot \cos(90^\circ) = a^2 \cdot 0 = 0$.

3. Các tính chất của Tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số thực k , ta có các tính chất sau:

- **Tính chất giao hoán:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- **Tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ:** $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- **Tính chất kết hợp với số thực:** $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- **Bình phương vô hướng:** $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0^\circ) = |\vec{a}|^2$. Đây là một tính chất cực kỳ quan trọng, liên hệ trực tiếp tích vô hướng với độ dài vectơ. Từ đây suy ra $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Hệ quả quan trọng:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

4. Biểu thức tọa độ của Tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

Công thức

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được tính bằng công thức đơn giản sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Đây là công thức được sử dụng thường xuyên nhất trong các bài toán tọa độ.

Ví dụ minh họa

1. **Ví dụ 1:** Cho $\vec{u} = (2; -3)$ và $\vec{v} = (5; 4)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Giải: Áp dụng công thức, ta có:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2.5 + (-3).4 = 10 - 12 = -2.$$

2. **Ví dụ 2:** Cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(4; -1)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Giải:

Trước hết, ta tìm tọa độ các vectơ:

$$\overrightarrow{AB} = (3-1; 2-1) = (2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-1; -1-1) = (3; -2)$$

Sau đó, tính tích vô hướng:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2.3 + 1.(-2) = 6 - 2 = 4.$$

5. Ứng dụng của Tích vô hướng

a. Tính độ dài của vectơ và khoảng cách giữa hai điểm

- **Độ dài vectơ:** Từ tính chất bình phương vô hướng, độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ là: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- **Khoảng cách giữa hai điểm:** Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_a, y_a)$ và $B(x_e, y_e)$ chính là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_e - x_a; y_e - y_a)$. Do đó: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_e - x_a)^2 + (y_e - y_a)^2}$

Ví dụ

Tính khoảng cách giữa hai điểm $M(2; -1)$ và $N(5; 3)$.

Giải: Ta có vectơ $\overrightarrow{MN} = (5-2; 3-(-1)) = (3; 4)$.

Khoảng cách $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

b. Tính góc giữa hai vectơ

Từ công thức định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, ta suy ra công thức tính cosin của góc giữa hai vectơ:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) / (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

Trong hệ tọa độ, với $\vec{a} = (a_1, a_2)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2)$, công thức trở thành:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) / (\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2})$$

Ví dụ

Cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 1)$ và $\vec{v} = (2; 4)$. Tính góc giữa hai vectơ này.

Giải:

1. Tính tích vô hướng: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6 + 4 = 10$.

2. Tính độ dài mỗi vectơ:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

3. Tính cosin của góc:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 10 / (\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}) = 10 / (2\sqrt{50}) = 10 / (2 \cdot 5\sqrt{2}) = 10 / (10\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}.$$

4. Suy ra góc: $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$.

c. Chứng minh hai vectơ vuông góc

Đây là một trong những ứng dụng mạnh mẽ nhất. Hai vectơ (khác vectơ-không) vuông góc với nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 90° . Khi đó $\cos(90^\circ) = 0$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Trong hệ tọa độ:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \mathbf{a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0}$$

Ví dụ

Tìm giá trị của m để vectơ $\vec{a} = (m; 2)$ vuông góc với vectơ $\vec{b} = (3; -6)$.

Giải:

Để $\vec{a} \perp \vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

Ta có: $m.3 + 2.(-6) = 0$

$$\Leftrightarrow 3m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m = 12$$

$$\Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy với $m = 4$ thì hai vectơ đã cho vuông góc với nhau.

6. Bài tập vận dụng tổng hợp

Bài 1

Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là A(1; 2), B(5; 2), C(1; 5).

1. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.
2. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.
3. Tính góc B của tam giác.

Lời giải:

a. Ta tính tọa độ các vectơ cạnh:

$$\overrightarrow{AB} = (5-1; 2-2) = (4; 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1; 5-2) = (0; 3)$$

$$\text{Tính tích vô hướng: } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4.0 + 0.3 = 0.$$

Vì $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ nên $\vec{AB} \perp \vec{AC}$. Vậy tam giác ABC vuông tại A.

b. Tính độ dài các cạnh:

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$AC = |\vec{AC}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

$$BC = \sqrt{(1-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{Chu vi tam giác ABC} = AB + AC + BC = 4 + 3 + 5 = 12.$$

$$\text{Vì tam giác vuông tại A, diện tích } S = (1/2) * AB * AC = (1/2) * 4 * 3 = 6.$$

c. Tính góc B. Góc B là góc giữa hai vectơ $\vec{BA}$ và $\vec{BC}$.

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = (-4; 0)$$

$$\vec{BC} = (1-5; 5-2) = (-4; 3)$$

$$\cos(B) = \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = (\vec{BA} \cdot \vec{BC}) / (|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-4) \cdot (-4) + 0 \cdot 3 = 16$$

$$|\vec{BA}| = 4$$

$$|\vec{BC}| = 5$$

$$\cos(B) = 16 / (4 * 5) = 16 / 20 = 4/5.$$

$$\text{Vậy góc B} \approx 36.87^\circ.$$