

Chuyên đề: Giới hạn của hàm số chứa căn thức bậc ba

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn toàn diện về cách giải quyết các bài toán giới hạn hàm số có chứa căn thức bậc ba. Đây là một dạng toán thường gặp trong chương trình Toán lớp 11, đòi hỏi học sinh phải nắm vững kỹ thuật nhân liên hợp để khử các dạng vô định.

I. Kiến thức nền tảng cần nhớ

Để giải quyết các bài toán giới hạn chứa căn bậc ba, công cụ quan trọng nhất là sử dụng các hằng đẳng thức liên quan đến lập phương để nhân liên hợp.

1. Các hằng đẳng thức đáng nhớ

- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

2. Công thức nhân liên hợp cho căn bậc ba

Từ các hằng đẳng thức trên, ta suy ra các biểu thức liên hợp cho căn bậc ba:

- Biểu thức $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$ có biểu thức liên hợp là $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

$$\text{Ta có: } (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

- Biểu thức $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$ có biểu thức liên hợp là $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

$$\text{Ta có: } (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$$

Lưu ý: Khi nhân một biểu thức với lượng liên hợp của nó, ta phải chia lại cho chính lượng liên hợp đó để giá trị của biểu thức không thay đổi.

II. Các dạng toán và phương pháp giải chi tiết

Chúng ta sẽ xét hai dạng vô định chính là $0/0$ và $\infty - \infty$.

Dạng 1: Giới hạn dạng vô định $0/0$

Phương pháp giải

- Bước 1:** Thay giá trị x_0 vào hàm số để xác nhận đây là dạng vô định $0/0$.
- Bước 2:** Sử dụng phương pháp nhân liên hợp cho biểu thức chứa căn bậc ba để làm xuất hiện nhân tử chung $(x - x_0)$ ở cả tử và mẫu.
- Bước 3:** Rút gọn nhân tử chung $(x - x_0)$.
- Bước 4:** Thay giá trị x_0 vào biểu thức đã rút gọn để tính kết quả.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x+7} - 2) / (x - 1)$

Phân tích:

Khi thay $x = 1$ vào biểu thức, ta có tử số là $\sqrt[3]{1+7} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 2 - 2 = 0$, và mẫu số là $1 - 1 = 0$. Đây là dạng vô định $0/0$.

Bài giải:

Ta cần nhân liên hợp cho tử số. Tử số có dạng $\sqrt[3]{a} - b$ với $a = x+7$ và $b = 2 = \sqrt[3]{8}$. Biểu thức liên hợp là $(\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 2^2$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x+7) - 2] * [(x+7)^2 + 2(x+7) + 4]}{[(x-1) * ((x+7)^2 + 2(x+7) + 4)]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+7) - 2^3}{(x-1) * ((x+7)^2 + 2(x+7) + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1) * ((x+7)^2 + 2(x+7) + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{((x+7)^2 + 2(x+7) + 4)}$$

Bây giờ, ta thay $x = 1$ vào biểu thức đã rút gọn:

$$L = 1 / ((1+7)^2 + 2(1+7) + 4) = 1 / (8^2 + 2*8 + 4) = 1 / (2^2 + 2*2 + 4) = 1 / (4 + 4 + 4) = 1/12$$

Vậy $L = 1/12$.

Ví dụ 2: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}) / x$

Phân tích:

Khi thay $x = 0$, ta có tử số là $\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{1} = 0$ và mẫu số là 0. Đây là dạng 0/0.

Bài giải:

Tử số có dạng $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$. Ta nhân với lượng liên hợp là $\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(1+x) - (1-x)] * [\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}]}{[x * (\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2})]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{[\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{[\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{[\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}]}$$

Thay $x = 0$ vào biểu thức đã rút gọn:

$$L = 2 / (?(1+0)^2 + ?(1-0) + ?(1-0)^2) = 2 / (?1 + ?1 + ?1) = 2 / (1 + 1 + 1) = 2/3$$

Vậy $L = 2/3$.

Dạng 2: Giới hạn dạng vô định $\infty - \infty$

Phương pháp giải

- Bước 1:** Xác nhận biểu thức có dạng $\infty - \infty$ khi x tiến đến ∞ .
- Bước 2:** Sử dụng phương pháp nhân liên hợp để biến đổi biểu thức từ dạng $(A - B)$ thành dạng phân thức $(A^3 - B^3) / (A^2 + AB + B^2)$.
- Bước 3:** Sau khi nhân liên hợp, ta thu được giới hạn dạng ∞/∞ . Tiếp tục giải bằng cách chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x .
- Bước 4:** Tính kết quả cuối cùng.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính giới hạn $L = \lim_{(x \rightarrow +\infty)} [\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} - x]$

Phân tích:

Khi $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} \sim \sqrt[3]{(x^3)} = x$. Do đó, biểu thức có dạng $\infty - \infty$.

Bài giải:

Ta xem biểu thức là $\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} - \sqrt[3]{(x^3)}$. Ta nhân và chia với biểu thức liên hợp là $[\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)}^2 + x\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} + x^2]$.

$$L = \lim_{(x \rightarrow +\infty)} [(\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} - x) * (\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)}^2 + x\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} + x^2) / (\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)}^2 + x\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} + x^2)] = \lim_{(x \rightarrow +\infty)} [(x^3 + 3x^2) - x^3] / [\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)}^2 + x\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)} + x^2]$$

$$\frac{(x^3 + 3x^2) + x^2}{(x^3 + 3x^2) + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2) + x^2}{(x^3 + 3x^2) + x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2) + x^2}{(x^3 + 3x^2) + x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2}$$

Bây giờ ta có dạng ∞/∞ . Chia cả tử và mẫu cho bậc cao nhất của x ở mẫu, là x^2 .

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2) + x^2}{(x^3 + 3x^2) + x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2) + x^2}{(x^3 + 3x^2) + x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2) + x^2}{(x^3 + 3x^2) + x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2}$$

Khi $x \rightarrow +\infty$, $3/x \rightarrow 0$. Do đó:

$$L = \frac{3}{(1 + 0)^2 + (1 + 0) + 1} = \frac{3}{1 + 1 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

Vậy $L = 1$.

Ví dụ 2: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}]$

Phân tích:

Khi $x \rightarrow +\infty$, cả hai số hạng đều tiến đến $+\infty$. Đây là dạng $\infty - \infty$.

Bài giải:

Ta nhân và chia với biểu thức liên hợp $\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + 2x^2)(x^3 - x^2)} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}$.

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(x^3 + 2x^2) - (x^3 - x^2)]}{[(x^3 + 2x^2)^2 + (x^3 + 2x^2)(x^3 - x^2) + (x^3 - x^2)^2]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{[(x^3 + 2x^2)^2 + (x^3 + 2x^2)(x^3 - x^2) + (x^3 - x^2)^2]}$$

Chia cả tử và mẫu cho x^2 :

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 2x^2)/x^3)^2 + ((x^3 + x^2 - 2x)/x^3) + (x^3 - x^2)/x^3)^2}{(1 + 2/x)^2 + (1 + 1/x - 2/x^2) + (1 - 1/x)^2}$$

Khi $x \rightarrow +\infty$, các số hạng $2/x$, $1/x$, $2/x^2$ đều tiến về 0.

$$L = 3 / ((1+0)^2 + (1+0-0) + (1-0)^2) = 3 / (1 + 1 + 1) = 3 / 3 = 1$$

Vậy $L = 1$.

Dạng 3: Giới hạn kết hợp (chứa cả căn bậc hai và căn bậc ba)

Phương pháp giải

Đối với dạng toán này, ta thường sử dụng kỹ thuật "thêm bớt" một hằng số thích hợp để tách giới hạn ban đầu thành tổng hoặc hiệu của hai giới hạn đơn giản hơn, sau đó giải quyết từng giới hạn riêng lẻ.

Ví dụ minh họa

Ví dụ: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}) / (x^2 - 1)$

Phân tích:

Khi thay $x = 1$, ta có tử số là $\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{1} = 1 - 1 = 0$, mẫu số là $1^2 - 1 = 0$. Đây là dạng $0/0$. Biểu thức chứa cả căn bậc hai và căn bậc ba.

Ta sẽ thêm bớt hằng số 1 vào tử số (vì khi $x=1$, cả hai căn đều bằng 1).

Bài giải:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1} - 1) - (\sqrt[3]{3x-2} - 1)}{(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{2x-1} - 1) - (\sqrt[3]{3x-2} - 1)}{(x^2 - 1)}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(2x-1) - 1}{(x^2 - 1)} \right] - \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(3x-2) - 1}{(x^2 - 1)} \right] = L1 - L2 \end{aligned}$$

Tính L1:

$$\begin{aligned} L1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(2x-1) - 1}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x+1} \right) \\ &= \frac{2}{(1+1)} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Tính L2:

$$\begin{aligned} L2 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(3x-2) - 1}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-3}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x+1} \right) \\ &= \frac{3}{(1+1)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Kết quả cuối cùng:

$$L = L1 - L2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Vậy $L = -\frac{1}{2}$.

III. Bài tập tự luyện

Dưới đây là một số bài tập để các bạn học sinh củng cố kiến thức:

1. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x - 2} \right)$
2. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3} - 1}{x^3} \right)$
3. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 - 1} - 2x]$
4. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + \sqrt[3]{1-x^3}]$

5. Tính $\lim_{(x \rightarrow 0)} (\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}) / x$

6. Tính $\lim_{(x \rightarrow -1)} (\sqrt[3]{x} + 1) / (x+1)$

VIDOCU.COM