

Chuyên đề: Diện tích đa giác và Hình thang

Chào các em học sinh lớp 8! Chuyên đề này sẽ giúp các em nắm vững kiến thức về cách tính diện tích của các loại đa giác, đặc biệt là công thức và các dạng bài tập liên quan đến diện tích hình thang. Đây là một phần kiến thức quan trọng, có nhiều ứng dụng trong thực tế và thường xuất hiện trong các bài kiểm tra.

1. Khái niệm và tính chất của diện tích đa giác

a. Khái niệm

Diện tích của một đa giác là số đo của phần mặt phẳng mà đa giác đó chiếm giữ. Mỗi đa giác có một diện tích xác định và diện tích của đa giác luôn là một số dương.

b. Các tính chất cơ bản

Diện tích đa giác có 3 tính chất quan trọng mà chúng ta cần ghi nhớ:

- **Tính chất 1:** Hai đa giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- **Tính chất 2:** Nếu một đa giác được chia thành những đa giác nhỏ không có điểm trong chung, thì diện tích của đa giác đó bằng tổng diện tích của những đa giác nhỏ.
- **Tính chất 3:** Diện tích của hình vuông có cạnh dài 1 đơn vị (ví dụ: 1cm, 1m) là 1 đơn vị diện tích (1cm^2 , 1m^2). Hình vuông này được gọi là hình vuông đơn vị.

2. Công thức tính diện tích các đa giác quen thuộc

Trước khi đi vào hình thang, chúng ta cùng ôn lại công thức tính diện tích của một số hình đã học. Đây là nền tảng để tính diện tích các đa giác phức tạp hơn.

a. Diện tích hình chữ nhật

- **Công thức:** $S = a \cdot b$

- **Giải thích:** Trong đó 'a' là chiều dài và 'b' là chiều rộng của hình chữ nhật.

- **Ví dụ 1:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 15m và chiều rộng 8m.

Tính diện tích mảnh vườn.

Lời giải: Áp dụng công thức, ta có $S = 15 \cdot 8 = 120 \text{ m}^2$.

- **Ví dụ 2:** Tính diện tích của một màn hình điện thoại hình chữ nhật có kích thước 16cm và 7cm.

Lời giải: Diện tích màn hình là $S = 16 \cdot 7 = 112 \text{ cm}^2$.

b. Diện tích hình vuông

- **Công thức:** $S = a^2$

- **Giải thích:** Trong đó 'a' là độ dài cạnh của hình vuông.

- **Ví dụ 1:** Một viên gạch hình vuông có cạnh dài 50cm. Tính diện tích viên gạch.

Lời giải: Diện tích viên gạch là $S = 50^2 = 2500 \text{ cm}^2$.

- **Ví dụ 2:** Một sân chơi hình vuông có diện tích là 81m^2 . Tính độ dài cạnh của sân chơi.

Lời giải: Gọi cạnh sân chơi là a. Ta có $a^2 = 81$. Suy ra $a = \sqrt{81} = 9\text{m}$.

c. Diện tích tam giác

- **Công thức:** $S = (1/2) \cdot a \cdot h$

- **Giải thích:** Trong đó 'a' là độ dài một cạnh đáy và 'h' là chiều cao tương ứng với cạnh đáy đó.

- **Trường hợp đặc biệt (tam giác vuông):** Diện tích tam giác vuông bằng một nửa tích hai cạnh góc vuông. $S = (1/2) \cdot a \cdot b$ (với a, b là độ dài hai cạnh góc vuông).

- **Ví dụ 1:** Một tam giác có độ dài cạnh đáy là 12cm và chiều cao tương ứng là 8cm. Tính diện tích.

Lời giải: $S = (1/2) \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$.

- **Ví dụ 2:** Tính diện tích một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt là 6m và 8m.

Lời giải: $S = (1/2) \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ m}^2$.

d. Diện tích hình bình hành

- **Công thức:** $S = a \cdot h$

- **Giải thích:** Trong đó 'a' là độ dài một cạnh và 'h' là chiều cao tương ứng với cạnh đó.

- **Ví dụ 1:** Một hình bình hành có cạnh đáy 10cm và chiều cao tương ứng là 7cm. Tính diện tích.

Lời giải: $S = 10 \cdot 7 = 70 \text{ cm}^2$.

- **Ví dụ 2:** Một mảnh đất hình bình hành có diện tích 240 m^2 và độ dài cạnh đáy là 20m. Tính chiều cao tương ứng.

Lời giải: Ta có $240 = 20 \cdot h$. Suy ra $h = 240 / 20 = 12\text{m}$.

3. Công thức tính diện tích hình thang (Nội dung trọng tâm)

Hình thang là một tứ giác lồi có hai cạnh đối song song. Hai cạnh song song này được gọi là hai đáy, hai cạnh còn lại gọi là hai cạnh bên.

a. Công thức tổng quát

- **Công thức:** $S = (1/2) \cdot (a + b) \cdot h$

- **Giải thích:**

- **a, b:** là độ dài hai cạnh đáy (đáy lớn và đáy nhỏ).
- **h:** là chiều cao của hình thang (khoảng cách giữa hai đáy).

Công thức có thể phát biểu bằng lời: "Diện tích hình thang bằng trung bình cộng hai đáy nhân với chiều cao".

- **Ví dụ 1:** Một thửa ruộng hình thang có độ dài hai đáy lần lượt là 30m và 50m, chiều cao là 20m. Tính diện tích thửa ruộng.

Lời giải: Áp dụng công thức, ta có $S = (1/2) \cdot (30 + 50) \cdot 20 = (1/2) \cdot 80 \cdot 20 = 800 \text{ m}^2$.

- **Ví dụ 2:** Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB = 6cm, CD = 14cm. Chiều cao AH = 7cm. Tính diện tích hình thang ABCD.

Lời giải: Diện tích hình thang ABCD là $S = (1/2) \cdot (AB + CD) \cdot AH = (1/2) \cdot (6 + 14) \cdot 7 = (1/2) \cdot 20 \cdot 7 = 70 \text{ cm}^2$.

- **Ví dụ 3:** Một hình thang có diện tích 150 cm^2 , chiều cao 10cm và đáy nhỏ là 12cm . Tính độ dài đáy lớn.

Lời giải: Gọi đáy lớn là b . Ta có $150 = (1/2) * (12 + b) * 10$. Suy ra $150 = 5 * (12 + b) \Rightarrow 30 = 12 + b \Rightarrow b = 18\text{cm}$.

b. Trường hợp đặc biệt: Hình thang vuông

Hình thang vuông là hình thang có một cạnh bên vuông góc với hai đáy. Cạnh bên vuông góc này chính là chiều cao của hình thang.

- **Công thức:** Vẫn áp dụng công thức chung $S = (1/2) * (a + b) * h$, trong đó 'h' chính là độ dài cạnh bên vuông góc với hai đáy.

- **Ví dụ:** Cho hình thang vuông ABCD (góc A = góc D = 90°) có hai đáy $AB = 8\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$ và cạnh bên $AD = 5\text{cm}$. Tính diện tích hình thang.

Lời giải: Vì $AD \perp CD$ nên AD là chiều cao của hình thang. Diện tích hình thang vuông ABCD là $S = (1/2) * (AB + CD) * AD = (1/2) * (8 + 12) * 5 = (1/2) * 20 * 5 = 50 \text{ cm}^2$.

4. Phương pháp tính diện tích đa giác bất kỳ

Để tính diện tích của một đa giác lồi bất kỳ, chúng ta thường không có công thức trực tiếp. Thay vào đó, ta sử dụng phương pháp chia đa giác đó thành các hình đơn giản hơn (tam giác, hình chữ nhật, hình thang...) mà ta đã biết công thức tính diện tích. Có hai cách tiếp cận chính:

a. Phương pháp 1: Chia nhỏ đa giác

Ta chia đa giác thành các tam giác hoặc các tứ giác quen thuộc. Diện tích của đa giác ban đầu bằng tổng diện tích của các hình đã chia.

- **Ví dụ:** Tính diện tích của đa giác ABCDE như hình vẽ, biết BCDE là hình chữ nhật có $BC = 10\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$. Đỉnh A cách BC một khoảng 4cm và nằm trên đường trung trực của BC.

Phân tích: Ta có thể chia đa giác ABCDE thành hình chữ nhật BCDE và tam giác ABE. Tuy nhiên, ta không biết rõ về tam giác ABE. Một cách chia hợp lý hơn là chia thành hình chữ nhật BCDE và tam giác $AB'A$ với B' là hình chiếu của A trên BC.

Một cách tiếp cận đơn giản hơn: Chia đa giác ABCDE thành hình chữ nhật BCDE và tam giác ABC. Nhưng ta không biết tam giác ABC. Cách tốt nhất là kẻ đường thẳng qua A song song với BC, cắt các đường thẳng vuông góc từ B và C. Thay vào đó, ta sẽ chia đa giác ABCDE thành 3 phần: hình chữ nhật BCDE và tam giác cân $AB'I$ với I là trung điểm BC. Cách đơn giản nhất là chia thành hình chữ nhật BCDE và tam giác cân có đáy là cạnh của hình chữ nhật. Nhưng đề bài không cho A nằm trên cạnh nào. Giả sử ta có đa giác ABCDE, trong đó BCDE là hình chữ nhật, và A là một đỉnh bên ngoài. Ta có thể chia đa giác này thành hình chữ nhật BCDE và tam giác ABE (nếu A, B, E thẳng hàng).

Ví dụ cụ thể hơn: Tính diện tích của một mảnh đất hình ngũ giác ABCDE, biết rằng $AC = 15\text{m}$, $AD = 20\text{m}$, và các khoảng cách từ B, C, E đến đường chéo AD lần lượt là $BH = 5\text{m}$, $CK = 7\text{m}$, $EG = 6\text{m}$ (với H, K, G nằm trên AD).

Lời giải: Ta chia ngũ giác thành 3 tam giác: $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ và $\triangle ADE$. Tuy nhiên, cách này phức tạp. Ta nên chia theo đường chéo AD. Ngũ giác được chia thành 3 tam giác: $\triangle ABD$, $\triangle ADE$, và $\triangle BCD$. Cách đơn giản nhất là chia thành $\triangle ABD$ và $\triangle ADE$ và $\triangle BCD$. Diện tích ngũ giác $S(ABCDE) = S(\triangle ABD) + S(\triangle ADE) + S(\triangle BCD)$.

+ $S(\Delta BCD)$. Ta cần biết chiều cao tương ứng.

Một cách chia khác: $S(ABCDE) = S(\Delta ABC) + S(\Delta ACD) + S(\Delta ADE)$.

Ví dụ đơn giản hơn: Cho ngũ giác ABCDE. Kẻ các đường cao BH, CK, EL xuống đường chéo AD. Ta có thể chia ngũ giác thành hình thang vuông BHCK, hình thang vuông CKLE và 2 tam giác vuông ABH, ELD. Diện tích ngũ giác sẽ là tổng diện tích các hình này. Đây là phương pháp phổ biến trong đo đạc đất đai.

b. Phương pháp 2: Phần bù

Ta tạo ra một hình chữ nhật (hoặc hình đơn giản khác) bao quanh đa giác. Diện tích của đa giác cần tính sẽ bằng diện tích hình chữ nhật lớn trừ đi tổng diện tích các phần thừa (thường là các tam giác vuông hoặc hình thang vuông).

- **Ví dụ:** Cho tam giác ABC với tọa độ các đỉnh A(1, 5), B(2, 1), C(6, 3) trong hệ trục tọa độ Oxy. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải:

1. Vẽ một hình chữ nhật MNPQ bao quanh tam giác ABC, với các đỉnh M(1,1), N(6,1), P(6,5), Q(1,5).
2. Diện tích hình chữ nhật MNPQ là $S(MNPQ) = (6-1) * (5-1) = 5 * 4 = 20$ (đvdt).
3. Phần thừa bao gồm 3 tam giác vuông: ΔAQC , ΔCNB , và ΔBMA .
4. Tính diện tích các tam giác vuông này:

- $S(\Delta AQC) = (1/2) * AQ * QC$. Ta có $Q(1,5)$, $A(1,5)$, $C(6,3)$. Điểm A và Q trùng nhau. Ví dụ này không hợp lý. Lấy lại tọa độ $A(2,5)$, $B(1,1)$, $C(6,2)$.
- Vẽ hình chữ nhật MNPQ với $M(1,1)$, $N(6,1)$, $P(6,5)$, $Q(1,5)$.
- $S(MNPQ) = (6-1) * (5-1) = 5 * 4 = 20$ (đvdt).
- Phần thừa là 3 tam giác vuông: $\Delta AQ A$, ΔBNC , ΔCPA . Tọa độ đỉnh là $A(2,5)$, $B(1,1)$, $C(6,2)$. Hình chữ nhật bao quanh có các đỉnh $(1,1)$, $(6,1)$, $(6,5)$, $(1,5)$.
- $S(\Delta AQ'A)$ với $Q'(1,5)$ và $A(2,5)$: $S = (1/2) * 1 * 0$? Không đúng. Ta phải tính diện tích các tam giác vuông ở các góc.
- Tam giác vuông ở góc trên bên trái: Đỉnh $(1,5)$, $(2,5)$, $(1,1)$. $S_1 = (1/2) * (2-1) * (5-1) = (1/2) * 1 * 4 = 2$.
- Tam giác vuông ở góc dưới bên phải: Đỉnh $(6,1)$, $(6,2)$, $(1,1)$. $S_2 = (1/2) * (6-1) * (2-1) = (1/2) * 5 * 1 = 2.5$.
- Tam giác vuông ở góc trên bên phải: Đỉnh $(6,5)$, $(2,5)$, $(6,2)$. $S_3 = (1/2) * (6-2) * (5-2) = (1/2) * 4 * 3 = 6$.
- Diện tích $\Delta ABC = S(MNPQ) - (S_1 + S_2 + S_3) = 20 - (2 + 2.5 + 6) = 20 - 10.5 = 9.5$ (đvdt).

5. Bài tập vận dụng

1. **Bài 1:** Mặt cắt của một chi tiết máy là một hình thang cân có đáy lớn 20mm, đáy nhỏ 12mm và cạnh bên 5mm. Tính diện tích mặt cắt của chi tiết máy.

Lời giải:

Gọi hình thang cân là ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Kẻ đường cao AH và BK từ A, B xuống CD. Ta có ABKH là hình chữ nhật nên $HK = AB = 12\text{mm}$.

Vì ABCD là hình thang cân nên $\triangle ADH = \triangle BCK$, suy ra $DH = CK$.

Ta có: $DH + HK + KC = CD \Rightarrow 2 \cdot DH + 12 = 20 \Rightarrow 2 \cdot DH = 8 \Rightarrow DH = 4\text{mm}$.

Xét tam giác vuông ADH, áp dụng định lý Pytago: $AH^2 = AD^2 - DH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$.

Suy ra $AH = 3\text{mm}$. Đây chính là chiều cao của hình thang.

Diện tích hình thang là: $S = (1/2) \cdot (AB + CD) \cdot AH = (1/2) \cdot (12 + 20) \cdot 3 = (1/2) \cdot 32 \cdot 3 = 48 \text{ mm}^2$.

2. **Bài 2:** Một mảnh vườn hình thang vuông ABCD (góc $A = D = 90^\circ$) có đáy nhỏ $AB = 40\text{m}$, chiều cao $AD = 30\text{m}$. Cạnh bên $BC = 50\text{m}$.

a) Tính độ dài đáy lớn CD.

b) Tính diện tích mảnh vườn.

Lời giải:

a) Kẻ đường cao BH từ B xuống CD (H thuộc CD). Tứ giác ABHD là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông. Suy ra $BH = AD = 30\text{m}$ và $DH = AB = 40\text{m}$.

Xét tam giác vuông BHC, áp dụng định lý Pytago: $BC^2 = BH^2 + HC^2$.

$$50^2 = 30^2 + HC^2 \Rightarrow 2500 = 900 + HC^2 \Rightarrow HC^2 = 1600 \Rightarrow HC = 40\text{m}.$$

Độ dài đáy lớn $CD = DH + HC = 40 + 40 = 80\text{m}$.

b) Diện tích mảnh vườn hình thang ABCD là:

$$S = (1/2) \cdot (AB + CD) \cdot AD = (1/2) \cdot (40 + 80) \cdot 30 = (1/2) \cdot 120 \cdot 30 = 1800 \text{ m}^2.$$