

Tổng hợp kiến thức Bất đẳng thức Cauchy và Ứng dụng

Bất đẳng thức Cauchy, còn được biết đến với tên gọi bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM), là một trong những công cụ mạnh mẽ và nền tảng nhất trong chương trình toán phổ thông, đặc biệt là trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN).

1. Định nghĩa và các dạng cơ bản của Bất đẳng thức Cauchy (AM-GM)

Bất đẳng thức này phát biểu rằng trung bình cộng của một dãy số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng.

a. Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm

- **Công thức:** Với hai số không âm a, b , ta luôn có: $(a + b) / 2 \geq \sqrt{ab}$ hoặc $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
- **Giải thích:** Tổng của hai số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng hai lần căn bậc hai của tích của chúng.
- **Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:** $a = b$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho số thực dương x . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 9/x$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương x và $9/x$, ta có:

$$P = x + 9/x \geq 2\sqrt{(x * 9/x)} = 2\sqrt{9} = 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 9/x \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ (vì $x > 0$).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6, đạt được khi $x = 3$.

2. **Ví dụ 2:** Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng $(a + b)(1/a + 1/b) \geq 4$.

Giải:

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai cặp số dương:

$$- a + b \geq 2\sqrt{(ab)}$$

$$- 1/a + 1/b \geq 2\sqrt{(1/(ab))}$$

Nhân vế theo vế hai bất đẳng thức trên (vì cả hai vế đều dương), ta được:

$$(a + b)(1/a + 1/b) \geq 2\sqrt{(ab)} * 2\sqrt{(1/(ab))} = 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

b. Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm

- **Công thức:** Với ba số không âm a, b, c , ta luôn có: $(a + b + c) / 3 \geq \sqrt[3]{(abc)}$ hoặc $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{(abc)}$.
- **Giải thích:** Tổng của ba số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng ba lần căn bậc ba của tích của chúng.
- **Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:** $a = b = c$.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 27$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y + z$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương x, y, z , ta có:

$$S = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{(xyz)} = 3\sqrt[3]{27} = 3 * 3 = 9.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$. Kết hợp với $xyz = 27$, ta có $x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 9, đạt được khi $x = y = z = 3$.

2. **Ví dụ 2:** Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ với mọi a, b, c không âm.

Giải:

Đây là một hệ quả trực tiếp. Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số a^3, b^3, c^3 :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{(a^3b^3c^3)} = 3abc.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a^3 = b^3 = c^3 \Leftrightarrow a = b = c$.

Đây là một bất đẳng thức rất quen thuộc và hữu ích.

c. Bất đẳng thức Cauchy cho n số không âm (Dạng tổng quát)

- **Công thức:** Với n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta có: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.
- **Giải thích:** Đây là dạng mở rộng cho n số bất kỳ.
- **Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:** $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2. Các hệ quả và biến thể quan trọng

Từ bất đẳng thức Cauchy, ta có thể suy ra nhiều hệ quả hữu ích giúp giải toán nhanh hơn.

Trường hợp	Phát biểu	Ứng dụng
Tổng không đổi	Nếu các số dương có tổng S không đổi, thì tích P của chúng đạt giá trị lớn nhất khi các số đó bằng nhau.	Tìm giá trị lớn nhất của một tích khi biết tổng. Ví dụ: Tìm hình chữ nhật có chu vi không đổi nhưng diện tích lớn nhất (đó là hình vuông).
Tích không đổi	Nếu các số dương có tích P không đổi, thì tổng S của chúng đạt giá trị nhỏ nhất khi các số đó bằng nhau.	Tìm giá trị nhỏ nhất của một tổng khi biết tích. Ví dụ: Tìm GTNN của $x + y$ khi $xy = k$ (hằng số).

Hệ quả dạng bình phương

- **Công thức:** $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
- **Giải thích:** Đây là trường hợp đặc biệt của BĐT Cauchy cho hai số x^2 và y^2 . Nó cũng tương đương với $(x - y)^2 \geq 0$, luôn đúng.
- **Ví dụ:** Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
Giải:
Áp dụng hệ quả trên, ta có:
 $a^2 + b^2 \geq 2ab$
 $b^2 + c^2 \geq 2bc$
 $c^2 + a^2 \geq 2ca$
Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức, ta được: $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$.

Chia cả hai vế cho 2, ta được điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

3. Kỹ thuật áp dụng BĐT Cauchy tìm Giá trị nhỏ nhất

Để tìm GTNN của một biểu thức, mục tiêu là biến đổi để biểu thức đó lớn hơn hoặc bằng một hằng số. Điều quan trọng nhất là phải kiểm tra xem dấu "=" có thể xảy ra hay không.

a. Kỹ thuật đánh giá trực tiếp

Đây là phương pháp đơn giản nhất, áp dụng trực tiếp công thức Cauchy vào các số hạng của biểu thức khi chúng có dạng phù hợp (thường là các số hạng có tích là hằng số).

- **Ví dụ:** Cho $x > 0$, tìm GTNN của $A = 4x + 1/x$.

Giải:

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $4x$ và $1/x$:

$$A = 4x + 1/x \geq 2\sqrt{4x \cdot 1/x} = 2\sqrt{4} = 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $4x = 1/x \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1/4 \Leftrightarrow x = 1/2$ (do $x > 0$).

Vậy GTNN của A là 4, đạt được khi $x = 1/2$.

b. Kỹ thuật "chọn điểm rơi" (Dự đoán dấu bằng)

Đây là kỹ thuật quan trọng nhất khi điều kiện của biến không cho phép dấu "=" xảy ra ở dạng áp dụng trực tiếp. Ta cần tách một số hạng thành tổng nhiều số hạng sao cho khi áp dụng Cauchy, các số hạng đó bằng nhau tại "điểm rơi" dự đoán.

- **Nguyên tắc:** Ta dự đoán giá trị của biến để biểu thức đạt GTNN (dựa vào điều kiện biên). Sau đó, ta tách các số hạng sao cho tại giá trị dự đoán đó, các số hạng tham gia vào BĐT Cauchy phải bằng nhau.
- **Ví dụ:** Cho $x \geq 3$. Tìm GTNN của biểu thức $B = x + 1/x$.

Phân tích sai lầm: Nếu áp dụng trực tiếp $x + 1/x \geq 2\sqrt{(x * 1/x)} = 2$, dấu "=" xảy ra khi $x = 1/x \Leftrightarrow x = 1$. Nhưng điều kiện là $x \geq 3$, nên x không thể bằng 1. Cách làm này sai.

Phân tích đúng (Chọn điểm rơi):

Ta dự đoán GTNN đạt được tại điểm biên, tức là $x = 3$. Tại đây, $x \neq 1/x$. Ta cần tách x để một phần của nó bằng $1/x$ khi $x = 3$.

Giả sử ta tách $x = ax + (1-a)x$. Ta sẽ áp dụng Cauchy cho ax và $1/x$. Dấu "=" xảy ra khi $ax = 1/x$. Thay $x = 3$ vào, ta có $a*3 = 1/3 \Leftrightarrow a = 1/9$.

Vậy ta sẽ tách $x = x/9 + 8x/9$.

Giải:

Ta có $B = x + 1/x = (x/9 + 1/x) + 8x/9$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $x/9$ và $1/x$:

$$x/9 + 1/x \geq 2\sqrt{(x/9 * 1/x)} = 2\sqrt{(1/9)} = 2/3.$$

$$\text{Vì } x \geq 3 \text{ nên } 8x/9 \geq 8*3/9 = 24/9 = 8/3.$$

$$\text{Suy ra, } B \geq 2/3 + 8/3 = 10/3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \{ x/9 = 1/x \text{ và } x = 3 \} \Leftrightarrow \{ x^2 = 9 \text{ và } x = 3 \} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy GTNN của B là $10/3$, đạt được khi $x = 3$.

c. Kỹ thuật thêm bớt hạng tử

Kỹ thuật này thường đi kèm với kỹ thuật chọn điểm rơi, nhằm tạo ra các biểu thức có thể khử được biến số sau khi áp dụng Cauchy.

- **Ví dụ:** Cho $x > 2$. Tìm GTNN của biểu thức $C = x + 1/(x-2)$.

Phân tích: Biểu thức có x và $x-2$ không đồng dạng. Ta cần tạo ra hạng tử $(x-2)$ để áp dụng Cauchy với $1/(x-2)$.

Giải:

Ta thêm và bớt 2 vào biểu thức:

$$C = (x - 2) + 1/(x-2) + 2.$$

Vì $x > 2$ nên $x - 2 > 0$. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $(x-2)$ và $1/(x-2)$:

$$(x - 2) + 1/(x-2) \geq 2\sqrt{((x-2) * 1/(x-2))} = 2.$$

$$\text{Do đó, } C \geq 2 + 2 = 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 = 1/(x-2) \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1$ (vì $x-2 > 0$) $\Leftrightarrow x = 3$.

Giá trị $x = 3$ thỏa mãn điều kiện $x > 2$.

Vậy GTNN của C là 4, đạt được khi $x = 3$.

4. Những sai lầm thường gặp khi sử dụng BĐT Cauchy

1. **Áp dụng cho số âm:** Bất đẳng thức Cauchy chỉ đúng cho các số thực **không âm**. Việc áp dụng cho các số có thể âm sẽ dẫn đến kết quả sai.
2. **Quên kiểm tra điều kiện xảy ra dấu "=":** Một bài toán tìm GTNN/GTLN chỉ hoàn chỉnh khi bạn chỉ ra được giá trị của biến để dấu "=" xảy ra. Nếu

dấu "=" không thể xảy ra (ví dụ, giá trị tìm được không thuộc tập xác định), kết quả đó không phải là GTNN/GTLN.

3. **Dấu "=" xảy ra không đồng thời:** Khi áp dụng nhiều bất đẳng thức

Cauchy trong một bài toán, phải đảm bảo rằng tất cả các dấu "=" xảy ra với cùng một điều kiện của biến. Nếu không, kết luận sẽ sai.

Ví dụ sai: Tìm GTNN của $D = x^2 + 1/x^2$ với $x \neq 0$.

Có bạn làm: $x^2 \geq 0$, $1/x^2 > 0$. GTNN của x^2 là 0 khi $x=0$. GTNN của $1/x^2$ không có. Cách này sai.

Lại có bạn làm: $x^2 + 1/x^2 \geq 2\sqrt{(x^2 * 1/x^2)} = 2$. Dấu bằng xảy ra khi $x^2=1/x^2 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=-1$. Đây là cách làm đúng.