Giới thiệu: Từ con số đến hàng ngũ thẳng tắp

Toán học không chỉ là những con số khô khan. Trong giờ thể dục, khi cô giáo yêu cầu cả lớp xếp thành các hàng dọc đều nhau, đó chính là lúc kiến thức về "Ước và Bội" được áp dụng. Chuyên đề này sẽ giúp các em hiểu rõ bản chất của ước, bội, ƯCLN, BCNN và cách vận dụng chúng để giải quyết các bài toán "xếp hàng" một cách dễ dàng.

I. Kiến thức nền tảng cần nắm vững

1. Ước và Bội

- **Công thức:** Nếu có số tự nhiên **a** chia hết cho số tự nhiên **b** thì ta nói **a là bội của b** và **b là ước của a**.
- **Giải thích:**
  - **Ước:** Một số được gọi là ước của số khác nếu nó chia hết cho số đó. Để tìm các ước của một số **a** (a > 1), ta lần lượt chia **a** cho các số tự nhiên từ 1 đến **a**. Nếu **a** chia hết cho số nào thì số đó là một ước của **a**. Kí hiệu tập hợp các ước của a là Ư(a).
  - **Bội:** Một số được gọi là bội của số khác nếu nó chia hết cho số đó. Để tìm các bội của một số **b** (b ≠ 0), ta nhân **b** lần lượt với 0, 1, 2, 3,... Kí hiệu tập hợp các bội của b là B(b).
- **Ví dụ:**

VIDOCU.COM

- Tìm các ước của 12: Ta lấy 12 chia cho các số từ 1 đến 12. Các phép chia hết là: 12:1, 12:2, 12:3, 12:4, 12:6, 12:12. Vậy **Ư(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}**.
- Tìm các bội nhỏ hơn 30 của 5: Ta nhân 5 với 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ta được: 0, 5, 10, 15, 20, 25. Vậy **B(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...}**. Các bội nhỏ hơn 30 của 5 là **{0, 5, 10, 15, 20, 25}**.

2. Số nguyên tố và Phân tích một số ra thừa số nguyên tố

- **Khái niệm:**
  - **Số nguyên tố:** là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
  - **Hợp số:** là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.
  - Lưu ý: Số 0 và số 1 không phải là số nguyên tố cũng không phải là hợp số.
- **Phân tích một số ra thừa số nguyên tố:** là viết số đó dưới dạng một tích của các thừa số nguyên tố.
- **Ví dụ:**
  - Số 7 là số nguyên tố vì chỉ chia hết cho 1 và 7.
  - Số 6 là hợp số vì ngoài 1 và 6, nó còn chia hết cho 2 và 3.
  - Phân tích số 90 ra thừa số nguyên tố:

    90 | 2

    45 | 3

    15 | 3

    5 | 5

VIDOCU.COM

1

Vậy **$90 = 2 . 3^2 . 5$**.

II. Ứng dụng 1: Tìm số hàng dọc nhiều nhất (ƯCLN)

3. Ước chung và Ước chung lớn nhất (ƯCLN)

- **Khái niệm:** Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó. Ước chung lớn nhất (ƯCLN) là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung.
- **Cách tìm ƯCLN:**
  1. **Bước 1:** Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
  2. **Bước 2:** Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.
  3. **Bước 3:** Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN cần tìm.
- **Ví dụ:** Tìm ƯCLN(36, 48).
  - **Bước 1:** Phân tích: $36 = 2^2 . 3^2$; $48 = 2^4 . 3$.
  - **Bước 2:** Thừa số nguyên tố chung là 2 và 3.
  - **Bước 3:** Số mũ nhỏ nhất của 2 là 2. Số mũ nhỏ nhất của 3 là 1.

    Vậy **$\text{ƯCLN}(36, 48) = 2^2 . 3^1 = 4 . 3 = 12$**.

4. Dạng bài toán xếp hàng ứng dụng ƯCLN

Đây là dạng toán yêu cầu chia một số lượng đối tượng (học sinh, cây, kẹo...) thành các phần đều nhau sao cho số phần là lớn nhất.

VIDOCU.COM

- **Dấu hiệu nhận biết:** Các từ khóa như "chia đều", "nhiều nhất", "lớn nhất"... và yêu cầu tìm số hàng, số tổ, số nhóm.
- **Phương pháp giải:** Số hàng dọc nhiều nhất có thể xếp được chính là **ƯCLN** của số học sinh các lớp/nhóm.
- **Ví dụ 1:** Một đội văn nghệ có 24 bạn nam và 30 bạn nữ. Đội muốn chia thành các nhóm sao cho số nam và số nữ ở mỗi nhóm đều bằng nhau. Hỏi có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu nhóm? Khi đó mỗi nhóm có bao nhiêu nam, bao nhiêu nữ?
  - **Phân tích:** Số nhóm phải là ước chung của 24 và 30. Để số nhóm là "nhiều nhất", ta cần tìm ƯCLN(24, 30).
  - **Giải:**

    Ta có: $24 = 2^3 . 3$; $30 = 2 . 3 . 5$

    ƯCLN(24, 30) = 2 . 3 = 6.

    Vậy, có thể chia được nhiều nhất thành 6 nhóm.

    Khi đó, mỗi nhóm có: 24 : 6 = 4 bạn nam.

    Mỗi nhóm có: 30 : 6 = 5 bạn nữ.

- **Ví dụ 2:** Ba lớp 6A, 6B, 6C có số học sinh lần lượt là 40, 44 và 32. Trong buổi chào cờ, cả ba lớp cần xếp thành các hàng dọc như nhau mà không có lớp nào có người bị lẻ hàng. Hỏi có thể xếp được nhiều nhất bao nhiêu hàng dọc?
  - **Phân tích:** Số hàng dọc phải là ước chung của 40, 44, 32. Số hàng dọc "nhiều nhất" chính là ƯCLN(40, 44, 32).

VIDOCU.COM

- **Giải:**

  Ta có: $40 = 2^3 . 5$; $44 = 2^2 . 11$; $32 = 2^5$

  ƯCLN(40, 44, 32) = $2^2 = 4$.

  Vậy, có thể xếp được nhiều nhất 4 hàng dọc.

III. Ứng dụng 2: Tìm tổng số học sinh (BCNN)

5. Bội chung và Bội chung nhỏ nhất (BCNN)

- **Khái niệm:** Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó. Bội chung nhỏ nhất (BCNN) là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung.
- **Cách tìm BCNN:**
  1. **Bước 1:** Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
  2. **Bước 2:** Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.
  3. **Bước 3:** Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN cần tìm.

- **Ví dụ:** Tìm BCNN(10, 12, 15).
  - **Bước 1:** Phân tích: $10 = 2 . 5$; $12 = 2^2 . 3$; $15 = 3 . 5$.
  - **Bước 2:** Thừa số chung và riêng là 2, 3, 5.
  - **Bước 3:** Số mũ lớn nhất của 2 là 2. Số mũ lớn nhất của 3 là 1. Số mũ lớn nhất của 5 là 1.

    Vậy **BCNN(10, 12, 15) = $2^2 . 3 . 5 = 60$**.

VIDOCU.COM

6. Dạng bài toán xếp hàng ứng dụng BCNN

Đây là dạng toán cho biết khi xếp một tổng số học sinh (chưa biết) thành các hàng có số lượng khác nhau (hàng 10, hàng 12...) thì vừa đủ hoặc thừa/thiếu một vài em. Yêu cầu là tìm tổng số học sinh đó.

- **Dấu hiệu nhận biết:** Các từ khóa "xếp hàng ... thì vừa đủ", "xếp hàng ... thì thừa/thiếu ...", "tìm số học sinh", "biết số học sinh trong khoảng từ ... đến ...".
- **Phương pháp giải:** Gọi số học sinh cần tìm là **a**. Nếu xếp hàng x, y, z mà vừa đủ thì **a** là bội chung của x, y, z. Nếu thừa **r** em thì **(a - r)** là bội chung. Nếu thiếu **s** em thì **(a + s)** là bội chung. Sau đó tìm BCNN và các bội chung thỏa mãn điều kiện đề bài.
- **Ví dụ 1 (Vừa đủ):** Số học sinh khối 6 của một trường khi xếp hàng 10, hàng 12, hàng 15 đều vừa đủ. Tính số học sinh khối 6, biết rằng số học sinh trong khoảng từ 350 đến 400 em.
  - **Phân tích:** Gọi số học sinh là **a**. Vì xếp hàng 10, 12, 15 đều vừa đủ nên **a** ⋮ 10, **a** ⋮ 12, **a** ⋮ 15. Do đó, **a** thuộc BC(10, 12, 15) và 350 ≤ a ≤ 400.
  - **Giải:**

    Ta có BCNN(10, 12, 15) = 60.

    BC(10, 12, 15) = B(60) = {0, 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, ...}

    Vì 350 ≤ a ≤ 400 nên ta chọn **a = 360**.

    Vậy, số học sinh khối 6 là 360 em.

VIDOCU.COM

- **Ví dụ 2 (Có dư):** Một liên đội thiếu niên khi xếp hàng 4, hàng 5, hàng 6 đều thừa 1 người. Tính số đội viên, biết rằng số đó trong khoảng từ 100 đến 150 người.
  - **Phân tích:** Gọi số đội viên là **a**. Khi xếp hàng 4, 5, 6 đều thừa 1 người, nghĩa là (a - 1) chia hết cho 4, 5, 6. Vậy (a - 1) là bội chung của 4, 5, 6 và 100 ≤ a ≤ 150.
  - **Giải:**

    Ta có BCNN(4, 5, 6) = 60.

    BC(4, 5, 6) = B(60) = {0, 60, 120, 180, ...}

    Vậy (a - 1) có thể là 0, 60, 120, 180, ...

    Suy ra a có thể là 1, 61, 121, 181, ...

    Vì 100 ≤ a ≤ 150 nên ta chọn **a = 121**.

    Vậy, liên đội có 121 đội viên.

IV. Bảng tổng kết phân biệt hai dạng toán

Để tránh nhầm lẫn, các em hãy ghi nhớ bảng phân biệt sau:

VIDOCU.COM

Đặc điểm	Bài toán dùng ƯCLN	Bài toán dùng BCNN
Dấu hiệu nhận biết	Cho nhiều số, yêu cầu chia thành các phần bằng nhau. Tìm số phần **lớn nhất**, **nhiều nhất**. (Ví dụ: Tìm số hàng nhiều nhất).	Cho một số chưa biết, biết rằng số đó chia hết (hoặc chia có dư) cho nhiều số khác. Tìm số chưa biết đó, thường có thêm điều kiện về khoảng giá trị. (Ví dụ: Tìm tổng số học sinh).
Bản chất	Đi tìm một **ƯỚC CHUNG** lớn nhất.	Đi tìm một **BỘI CHUNG** thỏa mãn điều kiện.
Kết quả	Kết quả tìm được thường **nhỏ hơn hoặc bằng** các số đã cho trong đề bài.	Kết quả tìm được thường **lớn hơn hoặc bằng** các số đã cho trong đề bài (trừ trường hợp BCNN bằng một trong các số).

Kết luận

Chuyên đề về ước và bội cùng ứng dụng trong bài toán xếp hàng là một phần kiến thức quan trọng và thú vị. Bằng cách nắm vững khái niệm, phân biệt rõ hai dạng toán và luyện tập thường xuyên, các em không chỉ giải quyết tốt các bài kiểm tra mà còn thấy được sự gắn kết của Toán học với cuộc sống hàng ngày.

VIDOCU