

1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

Trong một tam giác, có một mối liên hệ chặt chẽ giữa độ lớn của một góc và độ dài của cạnh đối diện với góc đó. Mối quan hệ này được thể hiện qua hai định lý quan trọng sau đây.

Định lý 1: Góc đối diện với cạnh lớn hơn

Phát biểu: Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Công thức (Xét tam giác ABC):

Nếu $AC > AB$ thì $\angle B > \angle C$

Giải thích: Nếu chúng ta có một tam giác và biết độ dài các cạnh của nó, chúng ta có thể so sánh độ lớn của các góc mà không cần đo. Cạnh nào dài nhất thì góc đối diện với nó (góc không kề với cạnh đó) sẽ là góc lớn nhất. Ngược lại, cạnh nào ngắn nhất thì góc đối diện với nó sẽ là góc nhỏ nhất.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác ABC.

Giải:

Trong tam giác ABC, ta có độ dài các cạnh:

$$BC (7 \text{ cm}) > AC (6 \text{ cm}) > AB (4 \text{ cm})$$

Theo định lý về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện, ta có:

Góc đối diện với cạnh BC là $\angle A$.

Góc đối diện với cạnh AC là $\angle B$.

Góc đối diện với cạnh AB là $\angle C$.

Vì $BC > AC > AB$ nên $\angle A > \angle B > \angle C$.

- **Ví dụ 2:** Cho tam giác MNP có $MN = 8 \text{ cm}$, $NP = 5 \text{ cm}$, $MP = 8 \text{ cm}$. So sánh các góc của tam giác MNP.

Giải:

Tam giác MNP là tam giác cân tại M vì có $MN = MP = 8 \text{ cm}$.

Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau, tức là $\angle P = \angle N$.

Ta so sánh hai cạnh bất kỳ, ví dụ $MN (8 \text{ cm})$ và $NP (5 \text{ cm})$. Vì $MN > NP$, nên góc đối diện với cạnh MN là $\angle P$ sẽ lớn hơn góc đối diện với cạnh NP là $\angle M$.

Vậy ta có: $\angle P = \angle N > \angle M$.

Định lí 2 (Định lí đảo): Cạnh đối diện với góc lớn hơn

Phát biểu: Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Công thức (Xét tam giác ABC):

Nếu $\angle B > \angle C$ thì $AC > AB$

Giải thích: Đây là định lí đảo của định lí 1. Nếu chúng ta biết số đo các góc trong một tam giác, chúng ta có thể so sánh độ dài các cạnh. Góc nào lớn nhất thì cạnh đối diện với nó sẽ là cạnh dài nhất. Góc nào nhỏ nhất thì cạnh đối diện với nó sẽ là cạnh ngắn nhất.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Hãy so sánh các cạnh của tam giác ABC.

Giải:

Tổng ba góc trong một tam giác là 180° . Ta có:

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ.$$

So sánh các góc, ta có: $\angle A (80^\circ) > \angle B (60^\circ) > \angle C (40^\circ)$.

Áp dụng định lí đảo, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn:

Cạnh đối diện $\angle A$ là BC.

Cạnh đối diện $\angle B$ là AC.

Cạnh đối diện $\angle C$ là AB.

Vậy, ta có: $BC > AC > AB$.

- **Ví dụ 2:** Cho tam giác DEF vuông tại D, có $\angle E = 50^\circ$. So sánh độ dài các cạnh của tam giác.

Giải:

Vì tam giác DEF vuông tại D nên $\angle D = 90^\circ$.

$$\text{Ta có } \angle F = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ.$$

So sánh các góc: $\angle D > \angle E > \angle F (90^\circ > 50^\circ > 40^\circ)$.

Do đó, ta có thứ tự các cạnh tương ứng: $EF > DF > DE$.

Lưu ý: Trong tam giác vuông, cạnh huyền (đối diện góc vuông) luôn là cạnh lớn nhất. Trong tam giác tù, cạnh đối diện góc tù luôn là cạnh lớn nhất.

2. Bất đẳng thức tam giác

Bất đẳng thức tam giác là một hệ quả quan trọng từ mối quan hệ giữa các cạnh của một tam giác. Nó cho biết điều kiện cần để ba đoạn thẳng có thể tạo thành một tam giác.

Định lý:

Phát biểu: Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Công thức (Xét tam giác ABC):

$$AB + AC > BC$$

$$AB + BC > AC$$

$$AC + BC > AB$$

Giải thích: Để kiểm tra xem ba đoạn thẳng có độ dài a, b, c có thể tạo thành một tam giác hay không, ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức với cạnh lớn nhất. Giả sử c là cạnh lớn nhất, ta chỉ cần kiểm tra xem $a + b > c$ có đúng không. Nếu đúng, ba đoạn thẳng đó tạo thành một tam giác.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Bộ ba đoạn thẳng nào sau đây có thể tạo thành một tam giác? a) 3 cm, 4 cm, 5 cm. b) 2 cm, 3 cm, 6 cm.

Giải:

a) Ta có cạnh lớn nhất là 5 cm. Kiểm tra tổng hai cạnh còn lại: $3 + 4 = 7$ cm. Vì $7 > 5$, nên bộ ba đoạn thẳng này **có thể** tạo thành một tam giác (đây là tam giác vuông).

b) Ta có cạnh lớn nhất là 6 cm. Kiểm tra tổng hai cạnh còn lại: $2 + 3 = 5$ cm. Vì $5 < 6$, nên bộ ba đoạn thẳng này **không thể** tạo thành một tam giác.

Hệ quả của Bất đẳng thức tam giác

Từ định lý bất đẳng thức tam giác, ta có một hệ quả rất hữu ích để xác định khoảng giá trị của một cạnh khi biết hai cạnh còn lại.

Phát biểu: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Kết hợp với định lý ban đầu, ta có:

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

Giải thích: Độ dài một cạnh của tam giác luôn lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại. Đây là công cụ mạnh để giải các bài toán tìm giá trị hoặc chứng minh liên quan đến độ dài cạnh.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ:** Cho tam giác ABC có $AB = 5$ cm và $AC = 8$ cm. Tìm các giá trị nguyên có thể có của cạnh BC.

Giải:

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$|AC - AB| < BC < AC + AB$$

$$|8 - 5| < BC < 8 + 5$$

$$3 < BC < 13$$

Vì độ dài cạnh BC là một số nguyên, nên BC có thể nhận các giá trị: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (cm).

3. Các dạng bài tập thường gặp

Dạng 1: So sánh các cạnh trong một tam giác khi biết các góc

Phương pháp:

1. Nếu chưa biết đủ 3 góc, tính góc còn lại dựa vào tổng 3 góc trong tam giác bằng 180° .
2. So sánh các góc với nhau.
3. Áp dụng định lí: "Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn" để suy ra thứ tự các cạnh.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 55^\circ$. Sắp xếp các cạnh của tam giác theo thứ tự từ bé đến lớn.

Giải:

$$\text{Ta có } \angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (45^\circ + 55^\circ) = 80^\circ.$$

So sánh các góc: $\angle A < \angle C < \angle B$ ($45^\circ < 55^\circ < 80^\circ$).

Vậy, các cạnh tương ứng là: BC AB AC.

Dạng 2: So sánh các góc trong một tam giác khi biết các cạnh

Phương pháp:

1. So sánh độ dài các cạnh đã cho.
2. Áp dụng định lí: "Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn" để suy ra thứ tự các góc.

Ví dụ: Cho tam giác PQR có $PQ = 7$ cm, $QR = 10$ cm, $PR = 9$ cm. Sắp xếp các góc của tam giác theo thứ tự từ lớn đến bé.

Giải:

So sánh các cạnh: $QR > PR > PQ$ ($10 \text{ cm} > 9 \text{ cm} > 7 \text{ cm}$).

Góc đối diện với QR là $\angle P$.

Góc đối diện với PR là $\angle Q$.

Góc đối diện với PQ là $\angle R$.

Vậy, thứ tự các góc là: $\angle P > \angle Q > \angle R$.

Dạng 3: Kiểm tra một bộ ba độ dài có phải là ba cạnh của một tam giác không

Phương pháp:

1. Xác định cạnh có độ dài lớn nhất trong ba độ dài đã cho.
2. Tính tổng độ dài hai cạnh còn lại.

3. So sánh tổng này với độ dài cạnh lớn nhất. Nếu tổng lớn hơn, đó là ba cạnh của một tam giác. Nếu tổng nhỏ hơn hoặc bằng, đó không phải là ba cạnh của một tam giác.

Ví dụ: Các bộ ba sau, bộ ba nào không thể là 3 cạnh của một tam giác? (6, 8, 10); (5, 5, 11); (7, 9, 12).

Giải:

- Với bộ (6, 8, 10): $6 + 8 = 14 > 10$. Đây là 3 cạnh của một tam giác.
- Với bộ (5, 5, 11): $5 + 5 = 10 < 11$. Đây **không phải** là 3 cạnh của một tam giác.
- Với bộ (7, 9, 12): $7 + 9 = 16 > 12$. Đây là 3 cạnh của một tam giác.