

Chuyên đề: Hệ thức Vi-ét và các ứng dụng

Hệ thức Vi-ét là một công cụ cực kỳ hữu ích trong chương trình Toán lớp 9, giúp chúng ta tìm ra mối liên hệ giữa các nghiệm của một phương trình bậc hai với các hệ số của nó. Nhờ đó, ta có thể giải quyết nhiều dạng bài toán phức tạp mà không cần tìm nghiệm cụ thể của phương trình.

I. Định lý Vi-ét (Phần thuận)

1. Phát biểu định lý

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm là x_1 và x_2 , thì tổng và tích của hai nghiệm đó được tính như sau:

- **Tổng hai nghiệm:** $S = x_1 + x_2 = -b/a$
- **Tích hai nghiệm:** $P = x_1 * x_2 = c/a$

Lưu ý: Định lý chỉ áp dụng được khi phương trình có nghiệm, tức là $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$).

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Giải:

1. Xác định các hệ số: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

2. Kiểm tra điều kiện có nghiệm: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

3. Áp dụng hệ thức Vi-ét:

- Tổng hai nghiệm: $S = x_1 + x_2 = -b/a = -(-5)/1 = 5$.
- Tích hai nghiệm: $P = x_1 \cdot x_2 = c/a = 6/1 = 6$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $2x^2 + 7x - 3 = 0$. Tính tổng và tích các nghiệm của phương trình.

Giải:

1. Xác định các hệ số: $a = 2, b = 7, c = -3$.

2. Kiểm tra điều kiện có nghiệm: Vì a và c trái dấu ($2 \cdot -3 = -6 < 0$) nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

3. Áp dụng hệ thức Vi-ét:

- Tổng hai nghiệm: $S = x_1 + x_2 = -b/a = -7/2$.
- Tích hai nghiệm: $P = x_1 \cdot x_2 = c/a = -3/2$.

II. Ứng dụng của Định lý Vi-ét

1. Nhẩm nghiệm phương trình bậc hai

Đây là một ứng dụng rất nhanh và hiệu quả trong một số trường hợp đặc biệt.

- **Trường hợp 1: Nếu $a + b + c = 0$**

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ sẽ có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = c/a$.

Ví dụ: Nhẩm nghiệm của phương trình $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

Ta thấy $a + b + c = 3 + (-8) + 5 = 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = c/a = 5/3$.

- **Trường hợp 2: Nếu $a - b + c = 0$**

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ sẽ có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -c/a$.

Ví dụ: Nhẩm nghiệm của phương trình $2024x^2 + 2025x + 1 = 0$.

Ta thấy $a - b + c = 2024 - 2025 + 1 = 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -c/a = -1/2024$.

2. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số u và v có tổng $S = u + v$ và tích $P = u * v$, thì hai số đó là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0$$

Điều kiện để tồn tại hai số u và v là: $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 1: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 10 và tích của chúng bằng 21.

Giải:

Gọi hai số cần tìm là u và v . Ta có $S = u + v = 10$ và $P = u*v = 21$.

Hai số u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - 10X + 21 = 0$.

Giải phương trình này, ta được $\Delta' = (-5)^2 - 21 = 4 > 0$.

Nghiệm của phương trình là $X_1 = 5 + 2 = 7$ và $X_2 = 5 - 2 = 3$.

Vậy hai số cần tìm là 3 và 7.

Ví dụ 2: Tìm hai cạnh của một hình chữ nhật, biết chu vi là 28m và diện tích là 48m^2 .

Giải:

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b ($a, b > 0$).

Chu vi là 28m, suy ra nửa chu vi là $a + b = 14\text{m}$ (Đây là tổng S).

Diện tích là 48m^2 , suy ra $a * b = 48$ (Đây là tích P).

Vậy a và b là nghiệm của phương trình: $X^2 - 14X + 48 = 0$.

Giải phương trình, ta được $\Delta' = (-7)^2 - 48 = 1 > 0$.

Nghiệm của phương trình là $X_1 = 7 + 1 = 8$ và $X_2 = 7 - 1 = 6$.

Vậy hai cạnh của hình chữ nhật là 6m và 8m.

III. Định lý Vi-ét đảo

Phát biểu: Nếu có hai số x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = S$ và $x_1 * x_2 = P$ thì hai số đó là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$ (với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$).

Đây chính là cơ sở cho ứng dụng tìm hai số khi biết tổng và tích đã nêu ở trên.

IV. Ứng dụng tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

1. Khái niệm biểu thức đối xứng

Một biểu thức được gọi là đối xứng giữa hai biến x_1 và x_2 nếu ta thay x_1 bằng x_2 và x_2 bằng x_1 thì giá trị của biểu thức không thay đổi.

Ví dụ: $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $|x_1 - x_2|$, ...

2. Phương pháp giải

Để tính giá trị của một biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1, x_2 , ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1:** Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm (thường là $\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$).
- Bước 2:** Áp dụng hệ thức Vi-ét để tính tổng $S = x_1 + x_2$ và tích $P = x_1 * x_2$.
- Bước 3:** Biến đổi biểu thức đối xứng đã cho thành một biểu thức chỉ chứa tổng S và tích P .
- Bước 4:** Thay các giá trị S và P đã tính ở Bước 2 vào biểu thức đã biến đổi để tính kết quả.

3. Biến đổi một số biểu thức đối xứng thường gặp

Dưới đây là bảng biến đổi các biểu thức đối xứng cơ bản theo S và P :

Biểu thức	Biến đổi theo S và P
$A = x_1^2 + x_2^2$	$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$
$B = x_1^3 + x_2^3$	$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = S(S^2 - 3P) = S^3 - 3SP$
$C = x_1^4 + x_2^4$	$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
$D = x_1 - x_2 $	$\sqrt{((x_1 - x_2)^2)} = \sqrt{((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2)} = \sqrt{(S^2 - 4P)}$ (với $S^2 - 4P \geq 0$)
$E = 1/x_1 + 1/x_2$	$(x_1 + x_2)/(x_1x_2) = S/P$ (với $P \neq 0$)
$F = x_1/x_2 + x_2/x_1$	$(x_1^2 + x_2^2)/(x_1x_2) = (S^2 - 2P)/P$ (với $P \neq 0$)
$G = (x_1 - a)(x_2 - a)$	$x_1x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 = P - aS + a^2$

4. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2 - 3x - 7 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = x_1^2 + x_2^2$

b) $B = 1/x_1 + 1/x_2$

c) $C = |x_1 - x_2|$

Giải:

1. Bước 1: Kiểm tra điều kiện có nghiệm.

Phương trình có $a = 1, c = -7$. Vì $ac = -7 < 0$ nên phương trình luôn có hai

nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

2. Bước 2: Tính S và P.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\circ S = x_1 + x_2 = -b/a = -(-3)/1 = 3$$

$$\circ P = x_1 * x_2 = c/a = -7/1 = -7$$

3. Bước 3 & 4: Biến đổi và tính giá trị.

• a) $A = x_1^2 + x_2^2$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

Thay $S = 3$ và $P = -7$ vào, ta được: $A = 3^2 - 2(-7) = 9 + 14 = 23$.

• b) $B = 1/x_1 + 1/x_2$ (Điều kiện $x_1, x_2 \neq 0$, tức là $P \neq 0$. Ở đây $P = -7 \neq 0$, thỏa mãn).

$$B = (x_1 + x_2)/(x_1x_2) = S/P$$

Thay $S = 3$ và $P = -7$ vào, ta được: $B = 3/(-7) = -3/7$.

• c) $C = |x_1 - x_2|$

$$C = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

Thay $S = 3$ và $P = -7$ vào, ta được: $C = \sqrt{3^2 - 4(-7)} = \sqrt{9 + 28} = \sqrt{37}$.