

Tổng hợp kiến thức về Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Trong chương trình Toán lớp 10, việc nắm vững các công thức lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt là vô cùng quan trọng. Các mối quan hệ này giúp chúng ta đơn giản hóa biểu thức và giải quyết nhiều bài toán lượng giác phức tạp. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức về bốn loại góc liên quan đặc biệt: đối nhau, bù nhau, phụ nhau và hơn kém π .

I. Các kiến thức cơ bản cần nhớ

Trước khi đi vào các công thức cụ thể, hãy nhớ lại định nghĩa các giá trị lượng giác trên đường tròn đơn vị tâm O, bán kính $R=1$:

- Trục hoành (Ox) được gọi là trục cosin.
- Trục tung (Oy) được gọi là trục sin.
- Điểm M(x; y) trên đường tròn đơn vị biểu diễn cho góc α thì: **$x = \cos(\alpha)$** và **$y = \sin(\alpha)$** .
- **$\tan(\alpha) = \sin(\alpha) / \cos(\alpha)$** (với $\cos(\alpha) \neq 0$)
- **$\cot(\alpha) = \cos(\alpha) / \sin(\alpha)$** (với $\sin(\alpha) \neq 0$)

II. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

1. Hai góc đối nhau (α và $-\alpha$)

Hai góc đối nhau là hai góc có tổng bằng 0. Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của góc α và góc $-\alpha$ đối xứng nhau qua trục hoành (trục Ox).

- **Công thức:**

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
- $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

- **Giải thích:** Vì hai điểm biểu diễn đối xứng qua trục Ox nên chúng có cùng hoành độ (cos) và tung độ (sin) đối nhau. Từ đó suy ra các giá trị của tan và cot. Mẹo ghi nhớ: "**Cos đối**" - chỉ có cos giữ nguyên dấu, các giá trị còn lại đổi dấu.

- **Ví dụ minh họa:**

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\sin(-60^\circ)$.

Lời giải: Áp dụng công thức cho hai góc đối nhau, ta có:

$$\sin(-60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\sqrt{3}/2.$$

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $A = \tan(x) + \tan(-x)$.

Lời giải: Ta có $\tan(-x) = -\tan(x)$.

$$\text{Do đó, } A = \tan(x) + (-\tan(x)) = \tan(x) - \tan(x) = 0.$$

2. Hai góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

Hai góc bù nhau là hai góc có tổng bằng 180° (hoặc π radian). Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của góc α và góc $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục tung (trục Oy).

- **Công thức:**

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

- **Giải thích:** Vì hai điểm biểu diễn đối xứng qua trục Oy nên chúng có cùng tung độ (sin) và hoành độ (cos) đối nhau. Mẹo ghi nhớ: "**Sin bù**" - chỉ có sin giữ nguyên dấu, các giá trị còn lại đổi dấu.

- **Ví dụ minh họa:**

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\cos(150^\circ)$.

Lời giải: Ta có $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$. Áp dụng công thức cho hai góc bù nhau:
 $\cos(150^\circ) = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\sqrt{3}/2$.

2. **Ví dụ 2:** Chứng minh rằng $\sin(10^\circ) = \sin(170^\circ)$.

Lời giải: Ta có $170^\circ = 180^\circ - 10^\circ$. Áp dụng công thức cho hai góc bù nhau:
 $\sin(170^\circ) = \sin(180^\circ - 10^\circ) = \sin(10^\circ)$. (Điều phải chứng minh)

3. Hai góc phụ nhau (α và $\pi/2 - \alpha$)

Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng bằng 90° (hoặc $\pi/2$ radian). Công thức này thể hiện mối quan hệ "chéo" giữa các giá trị lượng giác.

- **Công thức:**

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$

- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$

- $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot(\alpha)$

- $\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan(\alpha)$

- **Giải thích:** Sin của góc này bằng cos của góc kia, tan của góc này bằng cot của góc kia và ngược lại. Mẹo ghi nhớ: "**Phụ chéo**" - sin thành cos, cos thành sin, tan thành cot, cot thành tan.

- **Ví dụ minh họa:**

1. **Ví dụ 1:** Biết $\sin(30^\circ) = 1/2$. Tính $\cos(60^\circ)$.

Lời giải: Ta có $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$. Hai góc 30° và 60° là hai góc phụ nhau.

Do đó, $\cos(60^\circ) = \sin(30^\circ) = 1/2$.

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $B = \sin^2(25^\circ) + \sin^2(65^\circ)$.

Lời giải: Ta thấy $65^\circ = 90^\circ - 25^\circ$. Do đó $\sin(65^\circ) = \cos(25^\circ)$.

Vậy $B = \sin^2(25^\circ) + \cos^2(25^\circ)$. Áp dụng hằng đẳng thức lượng giác cơ bản $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ta có $B = 1$.

4. Hai góc hơn kém π (α và $\alpha + \pi$)

Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của góc α và góc $\alpha + \pi$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

- **Công thức:**

- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

- **Giải thích:** Vì hai điểm biểu diễn đối xứng qua gốc O nên hoành độ (cos) và tung độ (sin) của chúng đều đối nhau. Khi lập tỉ số $\tan = \sin/\cos$ và $\cot = \cos/\sin$, dấu trừ ở cả tử và mẫu sẽ triệt tiêu. Mẹo ghi nhớ: "**Hơn kém π , tan cot giữ nguyên**" - chỉ có tan và cot giữ nguyên, sin và cos đổi dấu.

- **Ví dụ minh họa:**

1. **Ví dụ 1:** Tính giá trị của $\tan(225^\circ)$.

Lời giải: Ta có $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$. Áp dụng công thức cho hai góc hơn kém π :

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan(45^\circ) = 1.$$

2. **Ví dụ 2:** Rút gọn biểu thức $C = \cos(x) + \cos(x + \pi) + \cos(x - \pi)$.

Lời giải: Ta có $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

Góc $(x - \pi)$ và x cũng là hai góc hơn kém π , nên $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$.

$$\text{Vậy } C = \cos(x) - \cos(x) - \cos(x) = -\cos(x).$$

III. Bảng tổng hợp và mẹo ghi nhớ

Bảng tổng hợp công thức

Góc liên quan	sin	cos	tan	cot
Đối nhau ($-\alpha$)	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$-\cot(\alpha)$
Bù nhau ($\pi - \alpha$)	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$-\cot(\alpha)$
Phụ nhau ($\pi/2 - \alpha$)	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\cot(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
Hơn kém π ($\alpha + \pi$)	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$

Mẹo ghi nhớ nhanh

Để dễ dàng nhớ các công thức trên, học sinh có thể học thuộc câu thơ sau:

"Cos đối, Sin bù, Phụ chéo, khác Pi tan cot"

- **Cos đối:** Trong hai góc đối nhau, giá trị cos bằng nhau, các giá trị còn lại đối nhau (thêm dấu "-").
- **Sin bù:** Trong hai góc bù nhau, giá trị sin bằng nhau, các giá trị còn lại đối nhau.
- **Phụ chéo:** Trong hai góc phụ nhau, các giá trị lượng giác "chéo" cho nhau (sin thành cos, tan thành cot và ngược lại).
- **Khác Pi tan cot:** Trong hai góc hơn kém π , giá trị tan và cot bằng nhau, còn sin và cos đối nhau.

Nắm vững các công thức này sẽ là nền tảng vững chắc để bạn tiếp tục chinh phục các kiến thức lượng giác nâng cao hơn.

VIDOCU.COM