

Tổng hợp kiến thức Giới hạn dãy số chứa căn thức và trị tuyệt đối

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn toàn diện về các phương pháp giải bài toán giới hạn dãy số, đặc biệt là các dạng bài phức tạp có chứa biểu thức căn và giá trị tuyệt đối. Đây là những dạng toán thường xuất hiện trong các bài kiểm tra và thi cử.

I. Kiến thức cơ bản cần nhớ

Trước khi đi vào các dạng toán cụ thể, học sinh cần nắm vững các kiến thức nền tảng sau:

1. Một vài giới hạn cơ bản

- $\lim(c) = c$ (với c là hằng số)
- $\lim(1/n) = 0$
- $\lim(1/n^k) = 0$ (với k là số nguyên dương)
- $\lim(q^n) = 0$ nếu $|q| < 1$
- $\lim(n^k) = +\infty$ (với k là số nguyên dương)

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn

Nếu $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = M$, ta có:

- $\lim(u_n + v_n) = L + M$

- $\lim(u_n - v_n) = L - M$
- $\lim(u_n \cdot v_n) = L \cdot M$
- $\lim(u_n / v_n) = L/M$ (với $M \neq 0$)

3. Các hằng đẳng thức sử dụng để nhân liên hợp

Đây là công cụ quan trọng để khử dạng vô định chứa căn thức.

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

II. Phương pháp tính giới hạn dãy số chứa căn thức

Dạng toán này thường gặp ở dạng vô định $\infty - \infty$. Phương pháp chính là nhân và chia với biểu thức liên hợp để khử dạng vô định.

1. Dạng căn bậc hai: $\lim [\sqrt{an^2 + bn + c} - \sqrt{an^2 + dn + e}]$

Đây là dạng vô định $\infty - \infty$. Ta nhân và chia với biểu thức liên hợp là $\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + dn + e}$.

Phương pháp:

1. Nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp.
2. Rút gọn tử số sau khi áp dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2$.
3. Chia cả tử và mẫu cho n (bậc cao nhất ở mẫu).
4. Tính giới hạn.

Ví dụ 1: Tính $L = \lim [\sqrt{n^2 + 2n} - n]$

Giải:

Đây là dạng $\infty - \infty$. Ta có:

$$L = \lim [(\sqrt{(n^2 + 2n)} - n)(\sqrt{(n^2 + 2n)} + n)] / [\sqrt{(n^2 + 2n)} + n]$$

$$L = \lim [(n^2 + 2n) - n^2] / [\sqrt{(n^2(1 + 2/n))} + n]$$

$$L = \lim [2n] / [n\sqrt{(1 + 2/n)} + n]$$

Chia cả tử và mẫu cho n:

$$L = \lim [2] / [\sqrt{(1 + 2/n)} + 1]$$

$$L = 2 / (\sqrt{(1 + 0)} + 1) = 2 / 2 = 1$$

Ví dụ 2: Tính $L = \lim [\sqrt{(4n^2 + n)} - \sqrt{(4n^2 - 1)}]$

Giải:

$$L = \lim [(4n^2 + n) - (4n^2 - 1)] / [\sqrt{(4n^2 + n)} + \sqrt{(4n^2 - 1)}]$$

$$L = \lim [n + 1] / [\sqrt{(n^2(4 + 1/n))} + \sqrt{(n^2(4 - 1/n^2))}]$$

$$L = \lim [n(1 + 1/n)] / [n\sqrt{(4 + 1/n)} + n\sqrt{(4 - 1/n^2)}]$$

Chia cả tử và mẫu cho n:

$$L = \lim [1 + 1/n] / [\sqrt{(4 + 1/n)} + \sqrt{(4 - 1/n^2)}]$$

$$L = (1 + 0) / (\sqrt{4} + \sqrt{4}) = 1 / (2 + 2) = 1/4$$

2. Dạng căn bậc ba: $\lim [\sqrt[3]{(an^3 + bn^2 + \dots)} - \sqrt[3]{(an^3 + cn^2 + \dots)}]$

Tương tự dạng căn bậc hai, ta nhân liên hợp với biểu thức $(a^2 + ab + b^2)$ để tạo ra hằng đẳng thức $a^3 - b^3$.

Phương pháp:

Sử dụng liên hợp: $A - B = (A^3 - B^3) / (A^2 + AB + B^2)$

Ví dụ: Tính $L = \lim [\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n]$

Giải:

Đặt $A = \sqrt[3]{n^3 + 3n^2}$ và $B = n$. Ta có:

$$L = \lim [(n^3 + 3n^2) - n^3] / [\sqrt[3]{(n^3 + 3n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} + n^2]$$

$$L = \lim [3n^2] / [n^2\sqrt[3]{(1 + 3/n)^2} + n^2\sqrt[3]{(1 + 3/n)} + n^2]$$

Chia cả tử và mẫu cho n^2 :

$$L = \lim [3] / [\sqrt[3]{(1 + 3/n)^2} + \sqrt[3]{(1 + 3/n)} + 1]$$

$$L = 3 / (\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1} + 1) = 3 / (1 + 1 + 1) = 1$$

III. Phương pháp tính giới hạn dãy số chứa giá trị tuyệt đối

Nguyên tắc cơ bản là phá dấu giá trị tuyệt đối. Vì ta xét giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$, ta chỉ cần xét dấu của biểu thức bên trong trị tuyệt đối khi n là một số rất lớn.

Phương pháp:

1. Xác định dấu của biểu thức $P(n)$ trong $|P(n)|$ khi $n \rightarrow +\infty$.
2. Nếu $P(n) > 0$ với n đủ lớn, thì $|P(n)| = P(n)$.
3. Nếu $P(n) < 0$ với n đủ lớn, thì $|P(n)| = -P(n)$.
4. Thay thế và tính giới hạn như thông thường.

Ví dụ 1: Tính $L = \lim [|2n - 3n^2| / (n^2 + 1)]$

Giải:

Khi $n \rightarrow +\infty$, ta có $2n - 3n^2 = n(2 - 3n)$. Vì $2 - 3n < 0$ với n lớn, nên $2n - 3n^2 < 0$.

Do đó, $|2n - 3n^2| = -(2n - 3n^2) = 3n^2 - 2n$.

$$L = \lim [(3n^2 - 2n) / (n^2 + 1)]$$

Chia cả tử và mẫu cho n^2 :

$$L = \lim [(3 - 2/n) / (1 + 1/n^2)] = (3 - 0) / (1 + 0) = 3$$

Ví dụ 2: Tính $L = \lim [\sqrt{n^2 + 3n} - |2 - n|]$

Giải:

Khi $n \rightarrow +\infty$, ta có $2 - n < 0$. Do đó, $|2 - n| = -(2 - n) = n - 2$.

$$L = \lim [\sqrt{n^2 + 3n} - (n - 2)] = \lim [\sqrt{n^2 + 3n} - n + 2]$$

Đây là dạng $(\infty - \infty) + 2$. Ta xử lý phần vô định trước:

$$\lim [\sqrt{n^2 + 3n} - n] = \lim [(n^2 + 3n - n^2) / (\sqrt{n^2 + 3n} + n)]$$

$$= \lim [3n / (n\sqrt{1 + 3/n} + n)]$$

$$= \lim [3 / (\sqrt{1 + 3/n} + 1)] = 3 / (\sqrt{1 + 0} + 1) = 3/2$$

$$\text{Vậy, } L = (\lim [\sqrt{n^2 + 3n} - n]) + \lim(2) = 3/2 + 2 = 7/2$$

IV. Dạng bài tập kết hợp và nâng cao

Các bài toán này yêu cầu vận dụng linh hoạt cả hai phương pháp trên.

Ví dụ: Tính $L = \lim [\sqrt{4n^2 + |1 - 5n|} - 2n]$

Giải:

Bước 1: Phá dấu giá trị tuyệt đối.

Khi $n \rightarrow +\infty$, $1 - 5n < 0$. Do đó, $|1 - 5n| = -(1 - 5n) = 5n - 1$.

Bài toán trở thành: $L = \lim [\sqrt{4n^2 + 5n - 1} - 2n]$

Bước 2: Nhân liên hợp.

Đây là dạng $\infty - \infty$. Ta có:

$$L = \lim [(\sqrt{4n^2 + 5n - 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + 2n)] / [\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + 2n]$$

$$L = \lim [(4n^2 + 5n - 1) - (2n)^2] / [\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + 2n]$$

$$L = \lim [5n - 1] / [\sqrt{n^2(4 + 5/n - 1/n^2)} + 2n]$$

$$L = \lim [n(5 - 1/n)] / [n\sqrt{4 + 5/n - 1/n^2} + 2n]$$

Bước 3: Chia cho bậc cao nhất và tính giới hạn.

Chia cả tử và mẫu cho n :

$$L = \lim [5 - 1/n] / [\sqrt{4 + 5/n - 1/n^2} + 2]$$

$$L = (5 - 0) / (\sqrt{4 + 0 - 0} + 2) = 5 / (2 + 2) = 5/4$$

V. Tổng kết

Để giải quyết các bài toán giới hạn dãy số chứa căn thức và trị tuyệt đối, học sinh cần:

1. Nhận dạng đúng dạng vô định (thường là $\infty - \infty$).
2. Đối với trị tuyệt đối: Xét dấu biểu thức bên trong khi $n \rightarrow +\infty$ để phá dấu.
3. Đối với căn thức: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp một cách chính xác.

4. Thực hiện các phép biến đổi đại số cẩn thận và áp dụng các quy tắc tính giới hạn cơ bản.

Luyện tập thường xuyên với các dạng bài tập khác nhau sẽ giúp củng cố kỹ năng và tăng tốc độ giải toán.

VIDOCU.COM