

Tổng hợp phương pháp giải phương trình mũ

Phương trình mũ là một trong những dạng toán quan trọng trong chương trình Toán lớp 12 và thường xuất hiện trong các kỳ thi. Bài viết này sẽ tổng hợp hai phương pháp giải hiệu quả và phổ biến nhất: phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

I. Phương pháp đặt ẩn phụ

Đây là phương pháp cơ bản nhất, giúp chuyển một phương trình mũ phức tạp về một phương trình đại số quen thuộc (phương trình bậc hai, bậc ba, đẳng cấp,...).

1. Nguyên tắc chung

Ý tưởng của phương pháp này là chọn một biểu thức chứa mũ thích hợp làm ẩn phụ (thường là t), đặt điều kiện cho ẩn phụ, sau đó thay vào phương trình ban đầu để được một phương trình mới đơn giản hơn theo t . Sau khi giải tìm t , ta quay lại giải tìm x .

- **Bước 1:** Biến đổi phương trình về dạng chứa các lũy thừa có thể biểu diễn qua nhau.
- **Bước 2:** Đặt ẩn phụ $t = a^{f(x)}$. Chú ý điều kiện của ẩn phụ: $t > 0$.
- **Bước 3:** Thay vào phương trình ban đầu để được một phương trình đại số theo t .

- **Bước 4:** Giải phương trình tìm **t**, so sánh với điều kiện.
- **Bước 5:** Với mỗi giá trị **t** thỏa mãn, thay lại để giải tìm **x**.

2. Các dạng đặt ẩn phụ thường gặp

Dạng 1: Đưa về phương trình bậc hai, bậc ba với một ẩn phụ

Phương trình có dạng: $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$

- **Phương pháp:** Đặt $t = a^{f(x)}$ (với $t > 0$).
- Phương trình trở thành: $mt^2 + nt + p = 0$.

Ví dụ 1: Giải phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

Lời giải:

1. Phương trình tương đương: $(3^2)^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
2. Đặt $t = 3^x$ (điều kiện $t > 0$).
3. Phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0$.
4. Giải phương trình bậc hai theo t, ta được: $t = 1$ hoặc $t = 3$ (cả hai đều thỏa mãn $t > 0$).
5.
 - Với $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
 - Với $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.
6. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$.

Lời giải:

1. Phương trình tương đương: $4.4^x - 6.2.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 4.(2^2)^x - 12.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 4.2^{2x} - 12.2^x + 8 = 0$.
2. Đặt **$t = 2^x$** (điều kiện $t > 0$).
3. Phương trình trở thành: $4t^2 - 12t + 8 = 0$.
4. Giải phương trình, ta được: $t = 1$ hoặc $t = 2$ (thỏa mãn $t > 0$).
5.
 - Với $t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
 - Với $t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
6. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1\}$.

Dạng 2: Đặt một ẩn phụ cho các cơ số nghịch đảo

Phương trình có dạng: **$m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$** , trong đó **$a.b = 1$** (tức là $b = 1/a$).

- **Phương pháp:** Đặt **$t = a^{f(x)}$** (với **$t > 0$**), suy ra **$b^{f(x)} = (1/a)^{f(x)} = 1/t$** .
- Phương trình trở thành: **$mt + n/t + p = 0 \Leftrightarrow mt^2 + pt + n = 0$** .

Ví dụ: Giải phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$.

Lời giải:

1. Ta nhận thấy $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$. Suy ra $(2 - \sqrt{3}) = 1 / (2 + \sqrt{3})$.
2. Đặt **$t = (2 + \sqrt{3})^x$** (điều kiện $t > 0$). Khi đó $(2 - \sqrt{3})^x = 1/t$.
3. Phương trình trở thành: $t + 1/t = 4$.
4. Quy đồng và giải: $t^2 - 4t + 1 = 0$. Ta được $t = 2 + \sqrt{3}$ hoặc $t = 2 - \sqrt{3}$ (cả hai đều dương).

5. ○ Với $t = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$.

○ Với $t = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.

6. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 1\}$.

Dạng 3: Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

Phương trình có dạng: $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot (ab)^{f(x)} + p \cdot b^{2f(x)} = 0$

- **Phương pháp:** Chia cả hai vế của phương trình cho $b^{2f(x)}$ (hoặc $a^{2f(x)}$).
- Phương trình trở thành: $m \cdot (a/b)^{2f(x)} + n \cdot (a/b)^{f(x)} + p = 0$.
- Đặt $t = (a/b)^{f(x)}$ (với $t > 0$), ta được phương trình bậc hai: $mt^2 + nt + p = 0$.

Ví dụ: Giải phương trình $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$.

Lời giải:

1. Phương trình tương đương: $6 \cdot (3^2)^x - 13 \cdot (2 \cdot 3)^x + 6 \cdot (2^2)^x = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$.
2. Đây là phương trình đẳng cấp bậc hai. Chia cả hai vế cho $4^x = 2^{2x} > 0$, ta được:
3. $6 \cdot (3^{2x}/2^{2x}) - 13 \cdot (3^x/2^x) + 6 = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (3/2)^{2x} - 13 \cdot (3/2)^x + 6 = 0$.
4. Đặt $t = (3/2)^x$ (điều kiện $t > 0$).
5. Phương trình trở thành: $6t^2 - 13t + 6 = 0$.
6. Giải phương trình, ta được $t = 3/2$ hoặc $t = 2/3$ (thỏa mãn $t > 0$).

7. $\circ$ Với $t = 3/2 \Rightarrow (3/2)^x = 3/2 \Leftrightarrow x = 1$.
- $\circ$ Với $t = 2/3 \Rightarrow (3/2)^x = 2/3 = (3/2)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.
8. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 1\}$.

II. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

(Phương pháp hàm số)

Phương pháp này thường được sử dụng khi các phương pháp biến đổi thông thường không hiệu quả, đặc biệt là khi phương trình chứa các biểu thức phức tạp và khó biến đổi. Cơ sở của phương pháp này là tính chất đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) của hàm số.

1. Cơ sở lý thuyết

- **Tính chất 1:** Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên tập xác định D thì phương trình $f(x) = k$ có tối đa một nghiệm trên D .
- **Tính chất 2:** Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ với mọi $u, v \in D$.
- **Tính chất 3:** Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến và hàm số $y = g(x)$ luôn nghịch biến trên D thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên D .

2. Các dạng áp dụng

Dạng 1: Nhẩm nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất

Phương pháp này áp dụng cho phương trình có thể đưa về dạng $f(x) = k$.

- **Bước 1:** Chuyển phương trình về dạng $f(x) = k$.

- **Bước 2:** Nhắm một nghiệm $x = x_0$ của phương trình.
- **Bước 3:** Xét hàm số $f(x)$. Dùng đạo hàm để chứng minh hàm số $f(x)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định.
- **Bước 4:** Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ: Giải phương trình $3^x + 4^x = 25$.

Lời giải:

1. Dễ dàng nhắm thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình vì $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
2. Xét hàm số $f(x) = 3^x + 4^x$ trên $\mathbb{R}$.
3. Ta có đạo hàm: $f'(x) = 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$.
4. Vì $3^x > 0$, $4^x > 0$, $\ln 3 > 0$, $\ln 4 > 0$ nên $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
5. Do đó, hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
6. Theo tính chất 1, phương trình $f(x) = 25$ có tối đa một nghiệm.
7. Vậy, $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Dạng 2: Biến đổi phương trình về dạng $f(u) = f(v)$

Phương pháp này áp dụng khi hai vế của phương trình có cấu trúc tương tự nhau.

- **Bước 1:** Biến đổi phương trình về dạng $f(u(x)) = f(v(x))$.
- **Bước 2:** Xét hàm đặc trưng $f(t)$. Chứng minh hàm số $f(t)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên một miền xác định nào đó chứa $u(x)$ và $v(x)$.

- **Bước 3:** Dựa vào tính chất 2, kết luận $u(x) = v(x)$.
- **Bước 4:** Giải phương trình $u(x) = v(x)$ để tìm nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình $3^{2x+1} - 3^{x+2} + 2x - 1 = 0$.

Lời giải:

1. Phương trình tương đương: $3 \cdot 3^{2x} + 2x = 9 \cdot 3^x + 1$.
2. Biến đổi để tạo cấu trúc giống nhau ở hai vế: $3 \cdot 3^{2x} + (2x+1) = 9 \cdot 3^x + 2 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + (2x+1) = 9 \cdot 3^x + 2$. (Hướng này phức tạp)
3. Thử cách khác: $3 \cdot 3^{2x} + (2x+1) = 3^{x+2} + 2$. (Vẫn phức tạp)
4. Biến đổi lại phương trình ban đầu: $3 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + (2x+1) = 9 \cdot 3^x + 2$. (Vẫn phức tạp)
5. Hãy thử biến đổi khéo léo hơn: $3^{2x+1} + (2x+1) = 3^{x+2} + (x+2)$.
6. Xét hàm số đặc trưng $f(t) = 3^t + t$.
7. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
8. Đạo hàm: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1$. Vì $3^t > 0$ và $\ln 3 > 0$ nên $f'(t) > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.
9. Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
10. Phương trình có dạng $f(2x+1) = f(x+2)$.
11. Do $f(t)$ đồng biến, ta có $2x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow x = 1$.
12. Vậy, nghiệm của phương trình là $x = 1$.

III. Lời kết và Luyện tập

Việc lựa chọn phương pháp giải phương trình mũ phụ thuộc vào dạng của phương trình. Phương pháp đặt ẩn phụ thường được ưu tiên vì nó cơ bản và dễ áp dụng cho các dạng quen thuộc. Khi phương trình có cấu trúc phức tạp, không thể biến đổi đại số, phương pháp hàm số lại tỏ ra cực kỳ hiệu quả. Học sinh cần luyện tập nhiều bài tập để nhận dạng và áp dụng thành thạo cả hai phương pháp này.

Bài tập tự luyện:

1. Giải phương trình: $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$
2. Giải phương trình: $(\sqrt{5} + 2)^x - (\sqrt{5} - 2)^x = 2$
3. Giải phương trình: $25^x - 2 \cdot 10^x + 4^x = 0$
4. Giải phương trình: $2^x = 3 - x$
5. Giải phương trình: $5^{x^2+1} - 5^{2x} = 2x - x^2 - 1$