

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

I. Lũy thừa

1. Khái niệm lũy thừa

- **Lũy thừa với số mũ nguyên dương:**

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ (n thừa số a), với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

- **Lũy thừa với số mũ nguyên:**

Với $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Ví dụ: $5^0 = 1$; $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9$.

- **Lũy thừa với số mũ hữu tỉ:**

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = m/n$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$):

$$a^r = a^{(m/n)} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ví dụ: $8^{(2/3)} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

- **Lũy thừa với số mũ thực:**

Cho $a > 0$, α là số vô tỉ. $a^\alpha = \lim(a^{r_n})$ với (r_n) là dãy số hữu tỉ sao cho $\lim(r_n) = \alpha$.

Ví dụ: $2^{\sqrt{2}}$ có thể được xấp xỉ bởi $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, ...

2. Các tính chất của lũy thừa

Với các số $a, b > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$, ta có các tính chất sau:

1. Tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m / a^n = a^{m-n}$$

Ví dụ: $x^5 \cdot x^{-2} = x^{5-2} = x^3$; $7^4 / 7^2 = 7^{4-2} = 7^2 = 49$.

2. Lũy thừa của một lũy thừa:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ví dụ: $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$.

3. Lũy thừa của một tích, một thương:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a/b)^n = a^n / b^n \text{ (với } b \neq 0)$$

Ví dụ: $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$; $(3/5)^3 = 3^3/5^3 = 27/125$.

3. So sánh hai lũy thừa

- **So sánh cùng cơ số:** Cho $a > 0$.

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$ (hàm đồng biến).

Ví dụ: $3^5 > 3^2$ vì $5 > 2$.

- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$ (hàm nghịch biến).

Ví dụ: $(1/2)^3 < (1/2)^2$ vì $3 > 2$.

- **So sánh cùng số mũ:** Cho số mũ $n > 0$.

- Nếu $a > b > 0$ thì $a^n > b^n$.

Ví dụ: $5^3 > 4^3$ vì $5 > 4$.

II. Logarit

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b .

$$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

- **Điều kiện có nghĩa:** biểu thức $\log_a b$ có nghĩa khi **$a > 0, a \neq 1, b > 0$** .
- Ví dụ 1: $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$.
- Ví dụ 2: $\log_3(1/9) = -2$ vì $3^{-2} = 1/9$.

2. Các tính chất và quy tắc

Cho $a, b > 0, a \neq 1$. Ta có:

- **$\log_a 1 = 0$**
- **$\log_a a = 1$**
- **$a^{(\log_a b)} = b$** (với $b > 0$)
- **$\log_a(a^\alpha) = \alpha$**

Với $b_1, b_2 > 0$, ta có các quy tắc tính:

1. Logarit của một tích:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$\text{Ví dụ: } \log_2(6) = \log_2(2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3.$$

2. Logarit của một thương:

$$\log_a(b_1/b_2) = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

$$\text{Ví dụ: } \log_3(5/3) = \log_3 5 - \log_3 3 = \log_3 5 - 1.$$

3. Logarit của một lũy thừa:

$$\log_a(b^\alpha) = \alpha \cdot \log_a b \text{ (với } b > 0)$$

$$\log_a^n(b) = (1/n) \cdot \log_a b \text{ (với } n \neq 0)$$

$$\text{Ví dụ: } \log_5(25^3) = 3 \cdot \log_5 25 = 3 \cdot 2 = 6.$$

3. Công thức đổi cơ số

Cho a, b, c là các số dương, $a \neq 1, c \neq 1$:

$$\log_a b = (\log_c b) / (\log_c a)$$

Hệ quả:

- $\log_a b = 1 / (\log_b a)$ (với $b \neq 1$)
- $\log_a(c) \cdot \log_c(b) = \log_a(b)$ (với $c \neq 1$)

Ví dụ: Tính $\log_9 16$ theo $\log_3 2$.

$$\text{Ta có: } \log_9 16 = \log_{3^2}(4^2) = (2/2) \cdot \log_3 4 = \log_3(2^2) = 2 \cdot \log_3 2.$$

III. Hàm số mũ và Hàm số logarit

Đặc điểm	Hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	Hàm số logarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)
Tập xác định	$D = \mathbb{R}$	$D = (0, +\infty)$
Tập giá trị	$T = (0, +\infty)$	$T = \mathbb{R}$
Đạo hàm	$y' = a^x \cdot \ln(a)$ Đặc biệt: $(e^x)' = e^x$	$y' = 1 / (x \cdot \ln a)$ Đặc biệt: $(\ln x)' = 1/x$
Chiều biến thiên	Nếu $a > 1$: hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.	Nếu $a > 1$: hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$. Nếu $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến trên $(0, +\infty)$.
Đồ thị	Đi qua điểm $(0, 1)$ và $(1, a)$. Nhận trục Ox làm tiệm cận ngang.	Đi qua điểm $(1, 0)$ và $(a, 1)$. Nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

IV. Phương trình và Bất phương trình Mũ

1. Phương trình mũ

- **Phương trình cơ bản:** Với $a > 0, a \neq 1$:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \text{ (với } b > 0)$$

$$\text{Ví dụ: } 2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

- **Phương pháp đặt ẩn phụ:**

Thường dùng khi phương trình có dạng: $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$.

Đặt $t = a^{f(x)}$ ($t > 0$), đưa về phương trình bậc hai theo t .

Ví dụ: $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), ta có $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$. Suy ra $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

- **Phương pháp logarit hóa:**

Dùng khi hai vế có cơ số khác nhau.

Ví dụ: $3^x = 5^{x-1} \Leftrightarrow \log_3(3^x) = \log_3(5^{x-1}) \Leftrightarrow x = (x-1)\log_3 5 \Leftrightarrow x(1 - \log_3 5) = -\log_3 5 \Leftrightarrow x = \log_3 5 / (\log_3 5 - 1)$.

2. Bất phương trình mũ

Với $a > 0$, $a \neq 1$:

- Trường hợp **$a > 1$** (cùng chiều):

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Ví dụ: $2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$.

- Trường hợp **$0 < a < 1$** (ngược chiều):

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Ví dụ: $(1/3)^{x-1} \geq 1/9 \Leftrightarrow (1/3)^{x-1} \geq (1/3)^2 \Leftrightarrow x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 3$.

V. Phương trình và Bất phương trình Logarit

1. Phương trình logarit

- **Phương trình cơ bản:** Với $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \{ f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \text{ và } f(x) = g(x) \}$$

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

Ví dụ: $\log_2(x-1) = 3$. Điều kiện $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Phương trình tương đương $x - 1 = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn).

- **Phương pháp đặt ẩn phụ:**

Thường dùng khi phương trình có dạng: $m.[\log_a f(x)]^2 + n.\log_a f(x) + p = 0$.

Đặt $t = \log_a f(x)$, đưa về phương trình bậc hai theo t .

Ví dụ: $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$. Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, ta có $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 4$. Suy ra $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 = 2$; $\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$.

- **Phương pháp mũ hóa:**

Dùng để khử logarit.

Ví dụ: $\log_3(\log_2(x)) = 1$. Điều kiện $x > 0$ và $\log_2(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Phương trình tương đương $\log_2(x) = 3^1 = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$ (thỏa mãn).

2. Bất phương trình logarit

Với $a > 0, a \neq 1$:

- Trường hợp **$a > 1$** (cùng chiều):

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \{ g(x) > 0 \text{ và } f(x) > g(x) \}$$

Ví dụ: $\log_2(x+1) > \log_2(2x-1) \Leftrightarrow \{ 2x-1 > 0 \text{ và } x+1 > 2x-1 \} \Leftrightarrow \{ x > 1/2 \text{ và } x < 2 \}$. Vậy $1/2 < x < 2$.

- Trường hợp **$0 < a < 1$** (ngược chiều):

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \{ f(x) > 0 \text{ và } f(x) < g(x) \}$$

Ví dụ: $\log_{0.5}(x-1) \geq -2 \Leftrightarrow \{ x-1 > 0 \text{ và } x-1 \leq (0.5)^{-2} \} \Leftrightarrow \{ x > 1 \text{ và } x-1 \leq 4 \} \Leftrightarrow \{ x > 1 \text{ và } x \leq 5 \}$. Vậy $1 < x \leq 5$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1: Rút gọn biểu thức

Bài toán: Rút gọn biểu thức $P = (a^{\sqrt{3}} \cdot a^{1-\sqrt{3}}) / (a^4)^{-1}$ với $a > 0$.

Lời giải:

$$P = a^{(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})} / a^{-4} = a^1 / a^{-4} = a^{1-(-4)} = a^5.$$

Dạng 2: Giải phương trình mũ

Bài toán: Giải phương trình $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$.

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$). Ta có phương trình: $t^2 - 2t - 8 = 0$.

Giải ra ta được $t = 4$ (nhận) hoặc $t = -2$ (loại).

Với $t = 4$, ta có $2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Dạng 3: Giải phương trình logarit

Bài toán: Giải phương trình $\log_3(x) + \log_9(x) + \log_{27}(x) = 11$.

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình tương đương $\log_3(x) + \log_3^2(x) + \log_3^3(x) = 11$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) + (1/2)\log_3(x) + (1/3)\log_3(x) = 11$$

$$\Leftrightarrow (1 + 1/2 + 1/3)\log_3(x) = 11$$

$$\Leftrightarrow (11/6)\log_3(x) = 11$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) = 6$$

$\Leftrightarrow x = 3^6 = 729$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 729$.

VIDOCU.COM