

Tổng hợp phương pháp giải phương trình và bất phương trình Logarit nâng cao

Đây là tài liệu tổng hợp các dạng toán và phương pháp giải phương trình, bất phương trình logarit phức tạp, thường xuất hiện trong các kỳ thi quan trọng. Nắm vững các phương pháp này sẽ giúp học sinh tự tin giải quyết các bài toán vận dụng cao.

A. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT NÂNG CAO

1. Phương pháp đặt ẩn phụ

Đây là phương pháp phổ biến, giúp đưa phương trình logarit phức tạp về dạng phương trình đại số quen thuộc (bậc hai, bậc ba,...).

a. Đặt ẩn phụ hoàn toàn

Phương pháp này áp dụng khi mọi biểu thức chứa logarit trong phương trình đều có thể biểu diễn qua một ẩn phụ t .

- **Bước 1:** Đặt điều kiện xác định cho phương trình.
- **Bước 2:** Chọn một biểu thức logarit làm ẩn phụ: $t = \log_a f(x)$. Tìm điều kiện cho t (nếu có).
- **Bước 3:** Biến đổi phương trình ban đầu về phương trình theo ẩn t .

- **Bước 4:** Giải phương trình tìm **t**, so sánh với điều kiện.
- **Bước 5:** Thay giá trị **t** tìm được vào biểu thức đặt ẩn phụ để tìm **x**. So sánh với điều kiện ban đầu và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_2^2(x) - 5\log_2(x) + 4 = 0$.

1. Điều kiện: $x > 0$.
2. Đặt **$t = \log_2(x)$** . Phương trình trở thành: **$t^2 - 5t + 4 = 0$** .
3. Giải phương trình theo **t**, ta được $t = 1$ hoặc $t = 4$.
4. Với $t = 1$, ta có $\log_2(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2^1 = 2$ (thỏa mãn).
5. Với $t = 4$, ta có $\log_2(x) = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$ (thỏa mãn).
6. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2, 16\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log_3(9x) - \log_{\sqrt{3}}(x) - 3 = 0$.

1. Điều kiện: $x > 0$.
2. Biến đổi phương trình: $(\log_3 9 + \log_3 x) - \log_3^{1/2}(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 + \log_3 x) - 2\log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow -\log_3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = -1$.
3. Giải ra ta được $x = 3^{-1} = 1/3$ (thỏa mãn).
4. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1/3$.

b. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Áp dụng khi phương trình không thể biến đổi hoàn toàn về ẩn phụ, vẫn còn lại biến **x**. Khi đó, ta coi **x** là tham số để giải phương trình theo **t**.

Ví dụ: Giải phương trình $\log_2^2(x) + (x - 1)\log_2(x) + 2x - 6 = 0$.

- Điều kiện: $x > 0$.
- Đặt $t = \log_2(x)$. Phương trình trở thành: $t^2 + (x - 1)t + 2x - 6 = 0$.
- Coi đây là phương trình bậc hai theo ẩn t , với tham số là x . Ta tính Delta: $\Delta = (x - 1)^2 - 4(2x - 6) = x^2 - 2x + 1 - 8x + 24 = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.
- Phương trình có hai nghiệm: $t = [- (x-1) + (x-5)] / 2 = -2$ hoặc $t = [- (x-1) - (x-5)] / 2 = -x + 3$.
- Với $t = -2$, ta có $\log_2(x) = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = 1/4$ (thỏa mãn).
- Với $t = -x + 3$, ta có $\log_2(x) = -x + 3$. Xét hàm số $f(x) = \log_2(x) + x - 3$. Ta có $f'(x) = 1/(x \ln 2) + 1 > 0$ với mọi $x > 0$. Vậy hàm số đồng biến. Nhận thấy $f(2) = \log_2 2 + 2 - 3 = 0$. Do đó, $x = 2$ là nghiệm duy nhất.
- Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1/4, 2\}$.

2. Phương pháp mũ hóa

Phương pháp này dùng để khử logarit trong phương trình.

- Dạng 1:** $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ (với điều kiện $f(x) > 0$ đã được thỏa mãn do $a^b > 0$).
- Dạng 2:** $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (với điều kiện $f(x) > 0$ hoặc $g(x) > 0$).
- Dạng 3:** $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ (cần đặt điều kiện $f(x) > 0$).

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_3(x^2 - 3x + 3) = 1$.

- Phương trình tương đương: $x^2 - 3x + 3 = 3^1$.
- $\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0$.

3. Ta được $x = 0$ hoặc $x = 3$.

4. Thử lại điều kiện $x^2 - 3x + 3 > 0$, cả hai nghiệm đều thỏa mãn.

5. Vậy tập nghiệm là $S = \{0, 3\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log_2(x + 1) = 3 - x$.

1. Điều kiện: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

2. Mũ hóa hai vế: $x + 1 = 2^{3-x} \Leftrightarrow x + 1 = 8/2^x \Leftrightarrow x \cdot 2^x + 2^x = 8$.

3. Xét hàm số $f(x) = x \cdot 2^x + 2^x$ trên $(-1, +\infty)$. Ta có $f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \ln 2 + 2^x \ln 2 > 0$ với mọi $x > -1$. Vậy hàm số đồng biến.

4. Nhận thấy $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2^2 = 8 + 4 = 12$ (lỗi ví dụ, sửa lại).

5. Sửa lại ví dụ: $\log_2(x+1) = 3-x$. Nhận thấy $x=1$ là nghiệm vì $\log_2(2) = 1$ và $3-2=1$. (Lỗi đề, sửa lại ví dụ)

Ví dụ 2 (sửa lại): Giải phương trình $\log_5(3x - 1) = \log_5(x + 3)$.

1. Điều kiện: $\{3x - 1 > 0 \text{ và } x + 3 > 0\} \Leftrightarrow \{x > 1/3 \text{ và } x > -3\} \Leftrightarrow x > 1/3$.

2. Phương trình tương đương: $3x - 1 = x + 3$.

3. $\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

4. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

3. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Phương pháp này dựa trên tính chất: Nếu hàm số $y = f(t)$ đơn điệu (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên một miền xác định D , thì với mọi u, v thuộc D , ta có: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

- **Bước 1:** Đặt điều kiện xác định.
- **Bước 2:** Biến đổi phương trình về dạng **$f(u(x)) = f(v(x))$** .
- **Bước 3:** Xét hàm số đặc trưng **$y = f(t)$** . Chứng minh hàm số này đơn điệu.
- **Bước 4:** Từ đó suy ra **$u(x) = v(x)$** và giải phương trình này để tìm nghiệm.

Ví dụ: Giải phương trình $\log_3(x^2 + x + 3) - \log_3 x = 2x - x^2$.

1. Điều kiện: $x > 0$.
2. Phương trình tương đương: $\log_3(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_3 x + x + 3$.
(Lỗi đề, sửa lại)
3. **Ví dụ đúng:** Giải phương trình $\log_2(x^2 - x + 1) + x^2 - x + 1 = \log_2(2x) + 2x$.
4. Điều kiện: $x^2 - x + 1 > 0$ (luôn đúng) và $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
5. Phương trình có dạng **$f(x^2 - x + 1) = f(2x)$** .
6. Xét hàm số đặc trưng **$f(t) = \log_2 t + t$** với $t > 0$.
7. Ta có $f'(t) = 1/(\ln 2) + 1 > 0$ với mọi $t > 0$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0, +\infty)$.
8. Do đó, phương trình tương đương: $x^2 - x + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$.
9. Giải phương trình bậc hai, ta được $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Cả hai nghiệm đều lớn hơn 0 và thỏa mãn.
10. Vậy tập nghiệm là $S = \{(3 + \sqrt{5})/2, (3 - \sqrt{5})/2\}$.

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

NÂNG CAO

Các phương pháp giải tương tự như phương trình, nhưng cần đặc biệt chú ý đến điều kiện của cơ số **a** và điều kiện xác định.

Trường hợp	Bất phương trình	Tương đương
Cơ số a > 1 (hàm đồng biến)	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\{f(x) > g(x) \text{ và } g(x) > 0\}$
Cơ số 0 < a < 1 (hàm nghịch biến)	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\{f(x) < g(x) \text{ và } f(x) > 0\}$

1. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ: Giải bất phương trình $\log_{0.5}^2(x) - \log_{0.5}(x) - 2 \leq 0$.

- Điều kiện: $x > 0$.
- Đặt **t = log_{0.5}(x)**. Bất phương trình trở thành: **t² - t - 2 ≤ 0**.
- Giải bất phương trình bậc hai theo t, ta được $-1 \leq t \leq 2$.
- Thay lại: $-1 \leq \log_{0.5}(x) \leq 2$.
- Vì cơ số 0.5 < 1, nên ta có: $(0.5)^2 \leq x \leq (0.5)^{-1}$.
- $\Leftrightarrow 0.25 \leq x \leq 2$.
- Kết hợp với điều kiện $x > 0$, ta được tập nghiệm là $S = [1/4, 2]$.

2. Phương pháp mũ hóa

Ví dụ: Giải bất phương trình $\log_3(x^2 - 2x) > 1$.

1. Điều kiện: $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$.
2. Vì cơ số $3 > 1$, bất phương trình tương đương: $x^2 - 2x > 3^1$.
3. $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$.
4. Giải bất phương trình bậc hai, ta được $x < -1$ hoặc $x > 3$.
5. Kết hợp với điều kiện ban đầu, ta được tập nghiệm là $S = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

3. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Dựa trên tính chất: Nếu $y = f(t)$ đồng biến thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$. Nếu $y = f(t)$ nghịch biến thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.

Ví dụ: Giải bất phương trình $\log_2(x+1) + x > 2$.

1. Điều kiện: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
2. Bất phương trình có thể viết lại: $\log_2(x+1) + (x+1) > 3$.
3. Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$. Ta đã biết hàm này đồng biến.
4. Ta có $f(2) = \log_2 2 + 2 = 3$.
5. Bất phương trình có dạng $f(x+1) > f(2)$.
6. Vì $f(t)$ đồng biến, nên $x + 1 > 2 \Leftrightarrow x > 1$.
7. Kết hợp điều kiện $x > -1$, ta được tập nghiệm là $S = (1, +\infty)$.

C. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Phương pháp phổ biến nhất là cô lập tham số và khảo sát hàm số.

- **Bước 1:** Đặt điều kiện xác định cho phương trình/bất phương trình.
- **Bước 2:** Biến đổi, đưa phương trình/bất phương trình về dạng $m = f(x)$ hoặc $m \geq f(x)$ hoặc $m \leq f(x)$.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định.
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán (có nghiệm, có k nghiệm, nghiệm đúng với mọi $x, \dots$) để kết luận giá trị của m .

Ví dụ: Tìm m để phương trình $\log_3^2(x) - \log_3(x^2) + 3 = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1, 27)$.

1. Điều kiện: $x > 0$. Phương trình tương đương: $\log_3^2(x) - 2\log_3(x) + 3 = m$.
2. Đặt $t = \log_3(x)$. Vì $x \in (1, 27)$ nên $t \in (\log_3 1, \log_3 27) = (0, 3)$.
3. Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $t^2 - 2t + 3 = m$ có nghiệm $t \in (0, 3)$.
4. Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ trên khoảng $(0, 3)$.
5. Ta có $f'(t) = 2t - 2$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
6. Lập bảng biến thiên cho $f(t)$ trên $(0, 3)$:

$$f(0) = 3$$

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$f(3) = 9 - 6 + 3 = 6$$
7. Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm $t \in (0, 3)$, đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị $y = f(t)$.
8. Vậy giá trị của m phải thỏa mãn $2 \leq m \leq 6$.