

Tổng hợp kiến thức: Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau

Trong hình học không gian, việc xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau là một dạng toán cơ bản và quan trọng. Phương pháp phổ biến và hiệu quả nhất là sử dụng một đường thẳng song song để quy về bài toán tìm góc giữa hai đường thẳng cắt nhau. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức liên quan.

1. Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng chéo nhau

Trong không gian, cho hai đường thẳng chéo nhau **a** và **b**.

Định nghĩa: Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau **a** và **b** là góc giữa hai đường thẳng **a'** và **b'** cùng đi qua một điểm O bất kỳ và lần lượt song song (hoặc trùng) với **a** và **b**.

Ký hiệu: **(a, b)** hoặc $\angle(a, b)$.

- Góc này không phụ thuộc vào vị trí của điểm O.
- Góc giữa hai đường thẳng có số đo từ 0° đến 90° .

2. Phương pháp xác định góc bằng cách dựng đường song song

Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau **a** và **b**, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Bước 1: Dựng đường thẳng song song

Chọn một điểm **O** thích hợp trong không gian (thường là một điểm đã có trên đường thẳng a hoặc b). Qua O, dựng đường thẳng **b'** song song với **b**.

Lưu ý: Việc chọn điểm O thông minh sẽ giúp việc tính toán ở bước sau trở nên đơn giản hơn. Thông thường, ta sẽ tận dụng các quan hệ song song có sẵn trong hình vẽ.

2. Bước 2: Xác định góc trong mặt phẳng

Khi đó, góc giữa hai đường thẳng chéo nhau **a** và **b** được quy về góc giữa hai đường thẳng cắt nhau **a** và **b'**.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}')$$

Góc này thường là một góc trong một tam giác mà ta có thể tính toán được các cạnh.

3. Bước 3: Tính toán góc

Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác để tính góc vừa xác định. Các công cụ thường dùng:

- **Hệ thức lượng trong tam giác vuông:** sin, cos, tan, cot.
- **Định lý Cosin trong tam giác thường:** Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c. Ta có: $\cos(A) = (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$
- **Định lý Sin trong tam giác thường:** $a/\sin(A) = b/\sin(B) = c/\sin(C) = 2R$.

Chú ý quan trọng: Nếu tính ra góc $\alpha > 90^\circ$, thì góc giữa hai đường thẳng sẽ là **$180^\circ - \alpha$** . Tuy nhiên, khi sử dụng định lý Cosin, ta thường lấy giá trị tuyệt đối của cos để đảm bảo góc nhận được là góc nhọn: **$\cos(a, b) = |\cos(a, b')|$** .

3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Áp dụng trên hình chóp

Đề bài: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải:

1. Bước 1: Dựng đường song song

Ta nhận thấy trong hình vuông ABCD, ta có **$CD \parallel AB$** .

2. Bước 2: Xác định góc

Vì $CD \parallel AB$, nên góc giữa hai đường thẳng SB và CD chính là góc giữa hai đường thẳng SB và AB.

$$(SB, CD) = (SB, AB) = \angle SBA.$$

3. Bước 3: Tính toán góc

Xét tam giác SAB:

- Ta có $SA \perp (ABCD)$, mà $AB \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AB$.
- Vậy tam giác SAB là tam giác vuông tại A.
- Ta có $SA = a$ và $AB = a$ (cạnh hình vuông).

Sử dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông SAB: **$\tan(\angle SBA) = SA / AB = a / a = 1$** .

Suy ra $\angle SBA = 45^\circ$.

Kết luận: Góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng 45° .

Ví dụ 2: Áp dụng trên hình lập phương

Đề bài: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và A'D.

Lời giải:

1. Bước 1: Dựng đường song song

Trong hình lập phương, ta có mặt (BCC'B') là hình vuông, suy ra $BC' \parallel A'D$.

2. Bước 2: Xác định góc

Vì $A'D \parallel BC'$, nên góc giữa AC và A'D chính là góc giữa AC và BC'.

$$(\mathbf{AC}, \mathbf{A'D}) = (\mathbf{AC}, \mathbf{BC'}) = \angle ACB'.$$

3. Bước 3: Tính toán góc

Để tính góc $\angle ACB'$, ta xét tam giác AB'C. Các cạnh của tam giác này là các đường chéo của các mặt hình vuông cạnh a.

- $\mathbf{AC}$ là đường chéo hình vuông ABCD $\Rightarrow \mathbf{AC} = a\sqrt{2}$.
- $\mathbf{AB'}$ là đường chéo hình vuông ABB'A' $\Rightarrow \mathbf{AB'} = a\sqrt{2}$.
- $\mathbf{B'C}$ là đường chéo hình vuông BCC'B' $\Rightarrow \mathbf{B'C} = a\sqrt{2}$.

Vì $AC = AB' = B'C = a\sqrt{2}$, nên tam giác AB'C là tam giác đều. Do đó, mọi góc trong tam giác đều bằng 60° .

Suy ra $\angle ACB' = 60^\circ$.

Kết luận: Góc giữa hai đường thẳng AC và A'D bằng 60° .

Ví dụ 3: Bài toán dựng thêm hình

Đề bài: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AC .

Lời giải:

1. Bước 1: Dựng đường song song

Trong bài toán này, không có sẵn đường thẳng song song. Ta sẽ chọn một điểm để dựng. Chọn điểm B và dựng đường thẳng Bx song song với AC . Tuy nhiên, cách này khó tính toán.

Ta thử một cách khác: Gọi M là trung điểm của AB . Vì $AB = 2a$, $DC = a$, nên $AM = a$. Ta có $AM \parallel DC$ và $AM = DC$. Do đó, $AMCD$ là hình bình hành. Mà $\angle D = 90^\circ$, nên $AMCD$ là hình chữ nhật. Suy ra **$AC \parallel DM$** .

2. Bước 2: Xác định góc

Vì $AC \parallel DM$, nên góc giữa SB và AC chính là góc giữa SB và DM .

$(SB, AC) = (SB, DM) = \angle(SB, DM)$. Ta sẽ tính góc SMB hoặc góc DMS tùy thuộc vào chúng có tù hay không. Ta sẽ tính cosin của góc này bằng cách xét tam giác SBM .

3. Bước 3: Tính toán góc

Xét tam giác SDM . Ta cần tính độ dài các cạnh SD , SM , DM .

- **DM :** Vì $AMCD$ là hình chữ nhật có $AD=a$, $DC=a$ nên nó là hình vuông. Vậy **$DM = AC = a\sqrt{2}$** .

- **SD:** Tam giác SAD vuông tại A, có $SA = a\sqrt{2}$, $AD = a$.

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2. \Rightarrow \mathbf{SD = a\sqrt{3}}.$$

- **SB:** Tam giác SAB vuông tại A, có $SA = a\sqrt{2}$, $AB = 2a$.

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = (a\sqrt{2})^2 + (2a)^2 = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2. \Rightarrow \mathbf{SB = a\sqrt{6}}.$$

Bây giờ, áp dụng định lý Cosin cho tam giác SBD để tính góc SDB (vì nó liên quan đến tam giác SDM). Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$.

$$\cos(\angle SDB) = (SD^2 + BD^2 - SB^2) / (2 * SD * BD) = (3a^2 + 5a^2 - 6a^2) / (2 * a\sqrt{3} * a\sqrt{5}) = 2a^2 / (2a^2\sqrt{15}) = 1/\sqrt{15}.$$

Cách này phức tạp. Hãy quay lại tam giác SDM. M là trung điểm AB, ta có thể tính được SM. Tam giác SAM vuông tại A: $SM^2 = SA^2 + AM^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2. \Rightarrow \mathbf{SM = a\sqrt{3}}$. Bây giờ xét tam giác SDM, ta có:

- $SD = a\sqrt{3}$
- $SM = a\sqrt{3}$
- $DM = a\sqrt{2}$

Tam giác SDM cân tại S. Áp dụng định lý Cosin để tính góc SMD: **$\cos(\angle SMD) = (SM^2 + DM^2 - SD^2) / (2 * SM * DM)$** $\cos(\angle SMD) = ((a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{2})^2 - (a\sqrt{3})^2) / (2 * a\sqrt{3} * a\sqrt{2}) = (a\sqrt{2})^2 / (2a^2\sqrt{6}) = 2a^2 / (2a^2\sqrt{6}) = 1/\sqrt{6}$. Vì $\cos(\angle SMD) > 0$ nên góc SMD là góc nhọn.

Kết luận: Góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\arccos(1/\sqrt{6})$.

4. Một số lưu ý quan trọng

- **Phạm vi của góc:** Luôn nhớ rằng góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn hoặc góc vuông ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$). Nếu tính toán ra góc từ α , góc cần tìm phải là

$180^\circ - \alpha$.

- **Chọn điểm dựng hình:** Việc chọn điểm O để dựng đường song song là rất quan trọng. Nên ưu tiên chọn các điểm có sẵn trên hình (đỉnh, trung điểm) để dễ dàng tạo ra các tam giác có thể tính toán được.
- **Tận dụng quan hệ song song có sẵn:** Trước khi dựng thêm, hãy quan sát kỹ hình vẽ để tìm các cặp đường thẳng song song có sẵn (cạnh đối hình bình hành, đường trung bình tam giác,...) để công việc trở nên đơn giản hơn.
- **Nắm vững công cụ tính toán:** Định lý Cosin là công cụ mạnh nhất và được sử dụng thường xuyên nhất trong dạng bài này. Bên cạnh đó, các hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lý Pytago cũng rất cần thiết.