

Tổng hợp kiến thức: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong hình học không gian, việc xác định khoảng cách giữa các đối tượng là một trong những dạng toán nền tảng và quan trọng. Chuyên đề này sẽ tổng hợp toàn bộ kiến thức lý thuyết và các phương pháp tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng một cách chi tiết và dễ hiểu nhất.

1. Định nghĩa và Ký hiệu

1.1. Định nghĩa

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là độ dài đoạn thẳng vuông góc MH kẻ từ M đến mặt phẳng (P) , trong đó H là hình chiếu vuông góc của M lên (P) .

1.2. Ký hiệu

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được ký hiệu là $d(M, (P))$.

Như vậy, $d(M, (P)) = MH$, với H là hình chiếu của M lên (P) .

Ví dụ minh họa: Trong một căn phòng, khoảng cách từ một bóng đèn (điểm M) trên trần nhà đến sàn nhà (mặt phẳng (P)) chính là độ dài của sợi dây dọi thả từ bóng đèn vuông góc xuống sàn nhà.

2. Các tính chất cơ bản

- Với mọi điểm M và mặt phẳng (P) , ta luôn có $d(M, (P)) \geq 0$.

- $d(M, (P)) = 0 \Leftrightarrow M \in (P)$.

- Nếu đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) , thì khoảng cách từ mọi điểm M thuộc Δ đến (P) là bằng nhau. Khi đó, ta gọi đó là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Ký hiệu: $d(\Delta, (P))$.

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau, thì khoảng cách từ mọi điểm M thuộc (P) đến (Q) là bằng nhau. Khi đó, ta gọi đó là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) . Ký hiệu: $d((P), (Q))$.

3. Các phương pháp xác định khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Đây là phần quan trọng nhất, bao gồm các kỹ thuật và phương pháp để giải quyết bài toán tính khoảng cách.

3.1. Phương pháp 1: Dựng hình chiếu vuông góc (Phương pháp trực tiếp)

Đây là phương pháp cơ bản nhất, dựa trực tiếp vào định nghĩa. Để tìm khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) , ta cần tìm hình chiếu vuông góc H của M lên (P) .

Các bước thực hiện:

1. Tìm một mặt phẳng phụ (Q) chứa M và vuông góc với mặt phẳng (P) .
2. Xác định giao tuyến Δ của (P) và (Q) .
3. Trong mặt phẳng (Q) , kẻ đường thẳng MH vuông góc với giao tuyến Δ tại H .
4. Khi đó, MH chính là khoảng cách từ M đến (P) . Tức là $d(M, (P)) = MH$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Giải:

- Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.
- Lại có ABCD là hình vuông nên $AB \perp BC$.
- Từ hai điều trên, suy ra $BC \perp (SAB)$.
- Do $BC \subset (SBC)$, nên $(SAB) \perp (SBC)$.
- Giao tuyến của (SAB) và (SBC) là SB.
- Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $AH \perp SB$ tại H.
- Vì $(SAB) \perp (SBC)$ và $AH \subset (SAB)$, $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$.
- Vậy $d(A, (SBC)) = AH$.
- Xét tam giác vuông SAB tại A, ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$.
- Suy ra $AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- Vậy **$d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$** .

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Giải:

- Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (ABCD), ta có $AC \perp BD$.

- Kẻ $AK \perp BD$ tại K (K trùng O).
- Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $AH \perp SO$ tại H.
- Ta có: $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$). Suy ra $BD \perp (SAC)$.
- Do $AH \subset (SAC)$ nên $BD \perp AH$.
- Ta có $AH \perp SO$ và $AH \perp BD$, suy ra $AH \perp (SBD)$.
- Vậy $d(A, (SBD)) = AH$.
- Trong tam giác vuông SAO tại A (O là tâm hình vuông), $AO = AC/2 = a\sqrt{2}/2$.
- Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAO: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{((a\sqrt{2})/2)^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{9}{4a^2}$.
- Suy ra $AH^2 = 4a^2/9 \Rightarrow AH = 2a/3$.
- Vậy $d(A, (SBD)) = 2a/3$.

3.2. Phương pháp 2: Sử dụng tỉ lệ khoảng cách (Phương pháp đổi điểm)

Phương pháp này rất hữu ích khi việc tính khoảng cách từ điểm M đến (P) khó khăn, nhưng có thể tính dễ dàng khoảng cách từ một điểm I khác (thường là chân đường cao) đến (P).

Nguyên lý:

- **Trường hợp 1:** Đường thẳng MI cắt mặt phẳng (P) tại điểm O. Khi đó, ta có tỉ lệ: $d(M, (P)) / d(I, (P)) = MO / IO$.
- **Trường hợp 2:** Đường thẳng MI song song với mặt phẳng (P). Khi đó: $d(M, (P)) = d(I, (P))$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB).

Giải:

- Vì M là trung điểm CD, ta có $AD \parallel BC$, $CD \parallel AB$ nên ADCM là hình bình hành. Do đó, $AM \parallel BC$.
- Mà $BC \subset (SBC)$, nên $AM \parallel (SBC)$.
- Do đó, khoảng cách từ M đến (SBC) bằng khoảng cách từ A đến (SBC).
- **$d(M, (SBC)) = d(A, (SBC))$.**
- Ta tính $d(A, (SBC))$. Theo ví dụ 1 ở phương pháp 1, ta kẻ $AH \perp SB$. Khoảng cách cần tìm là AH.
- Trong tam giác vuông SAB: $1/AH^2 = 1/SA^2 + 1/AB^2 = 1/a^2 + 1/a^2 = 2/a^2$.
- Suy ra $AH = a\sqrt{2}/2$.
- Vậy **$d(M, (SBC)) = a\sqrt{2}/2$.**

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a . $SA = a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (ABC).

Giải:

- Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó SM là trung tuyến của tam giác SBC, và G thuộc SM.
- Ta có $SG/SM = 2/3$.

- Đường thẳng SG cắt mặt phẳng (ABC) tại M.
- Áp dụng công thức tỉ lệ khoảng cách (trường hợp 1), ta có: $d(G, (ABC)) / d(S, (ABC)) = GM / SM = 1/3$.
- Khoảng cách từ S đến (ABC) chính là độ dài đường cao SA, vì $SA \perp (ABC)$.
- $d(S, (ABC)) = SA = a\sqrt{3}$.
- Do đó, $d(G, (ABC)) = (1/3) * d(S, (ABC)) = (1/3) * SA = a\sqrt{3}/3$.
- Vậy $d(G, (ABC)) = a\sqrt{3}/3$.

3.3. Phương pháp 3: Sử dụng công thức thể tích

Phương pháp này dựa trên mối liên hệ giữa thể tích khối chóp, diện tích đáy và chiều cao.

Công thức: Thể tích khối chóp S.ABC là $V = (1/3) * S_{\text{đáy}} * h$. Từ đó suy ra chiều cao $h = 3V / S_{\text{đáy}}$.

Nếu ta cần tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC), thì $h = d(S, (ABC))$. Vậy:

$$d(S, (ABC)) = 3 * V_{S.ABC} / S_{ABC}$$

Các bước thực hiện:

1. Xem điểm cần tính khoảng cách là đỉnh của một khối chóp, và mặt phẳng là mặt đáy.
2. Tính thể tích của khối chóp đó bằng một cách khác (chọn đỉnh và đáy khác thuận lợi hơn).
3. Tính diện tích của mặt đáy (mặt phẳng cần tính khoảng cách).

4. Áp dụng công thức trên để suy ra khoảng cách.

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Giải:

- Ta có $SA \perp SB$ và $SA \perp SC \Rightarrow SA \perp (SBC)$.
- Thể tích khối chóp S.ABC là: **$V_{S.ABC} = (1/6) * SA * SB * SC = abc/6$** .
(Công thức tính nhanh cho tứ diện vuông). Hoặc có thể tính $V = (1/3) * SA * S_{SBC}$
 $S_{SBC} = (1/3) * a * (1/2 * b * c) = abc/6$.
- Bây giờ ta cần tính diện tích tam giác ABC.
- Trong tam giác vuông SAB: $AB^2 = SA^2 + SB^2 = a^2 + b^2$.
- Trong tam giác vuông SAC: $AC^2 = SA^2 + SC^2 = a^2 + c^2$.
- Trong tam giác vuông SBC: $BC^2 = SB^2 + SC^2 = b^2 + c^2$.
- Diện tích tam giác ABC có thể tính bằng công thức Heron, nhưng ở đây ta có thể tính diện tích hình chiếu. Hoặc ta có công thức tính nhanh diện tích mặt huyền của tứ diện vuông: **$S_{ABC}^2 = S_{SAB}^2 + S_{SAC}^2 + S_{SBC}^2$** .
- $S_{SAB} = ab/2$, $S_{SAC} = ac/2$, $S_{SBC} = bc/2$.
- $S_{ABC}^2 = (ab/2)^2 + (ac/2)^2 + (bc/2)^2 = (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)/4$.
- $S_{ABC} = (1/2) * \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.
- Khoảng cách từ S đến (ABC) là h, ta có: $h = 3 * V_{S.ABC} / S_{ABC}$.
- $h = 3 * (abc/6) / [(1/2) * \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}] = (abc/2) / [(1/2) * \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}] = \mathbf{abc / \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$.

- Kết quả này tương đương với hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$.

3.4. Phương pháp 4: Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Đây là phương pháp mạnh, đặc biệt hiệu quả khi hình vẽ phức tạp, khó xác định chân đường cao. Phương pháp này thường được học kỹ ở lớp 12 nhưng có thể áp dụng sớm.

Các bước thực hiện:

1. Chọn một hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp (thường gắn gốc O vào một đỉnh có các cạnh đôi một vuông góc).
2. Xác định tọa độ của điểm $M(x_0, y_0, z_0)$.
3. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.
4. Áp dụng công thức khoảng cách.

Công thức: Khoảng cách từ điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d(M, (P)) = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Ví dụ: (Giải lại Ví dụ 2, Phương pháp 1) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Giải:

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với gốc A(0, 0, 0), tia Ax trùng AD, tia Ay trùng AB, tia Az trùng AS.
- Tọa độ các điểm: A(0, 0, 0), B(0, a, 0), D(a, 0, 0), S(0, 0, 2a).

- Viết phương trình mặt phẳng (SBD). Mặt phẳng này đi qua 3 điểm S, B, D.
- Vectơ $\overrightarrow{SB} = (0, a, -2a)$, Vectơ $\overrightarrow{SD} = (a, 0, -2a)$.
- Vectơ pháp tuyến của (SBD) là $\mathbf{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (a*(-2a) - (-2a)*0, (-2a)*a - 0*(-2a), 0*0 - a*a) = (-2a^2, -2a^2, -a^2)$.
- Ta có thể chọn vectơ pháp tuyến đơn giản hơn là $\mathbf{n}' = (2, 2, 1)$.
- Phương trình mặt phẳng (SBD) đi qua S(0, 0, 2a) và có VTPT $\mathbf{n}'(2, 2, 1)$ là:
 $2(x-0) + 2(y-0) + 1(z-2a) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{2x + 2y + z - 2a = 0}$.
- Khoảng cách từ điểm A(0, 0, 0) đến mặt phẳng (SBD) là:
- $d(A, (SBD)) = |2*0 + 2*0 + 0 - 2a| / \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = |-2a| / \sqrt{9} = 2a/3$.
- Vậy $\mathbf{d(A, (SBD)) = 2a/3}$. Kết quả trùng khớp với cách làm trực tiếp.

4. Bảng tổng hợp một số trường hợp đặc biệt

Dưới đây là bảng tóm tắt cách xác định nhanh khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên trong các dạng hình chóp quen thuộc.

Loại hình chóp	Đặc điểm	Cách xác định $d(A, (SBC))$ (A là chân đường cao)
Chóp có cạnh bên vuông góc với đáy	$SA \perp (ABC)$	1. Từ A, kẻ $AK \perp BC$. 2. Nối S với K. 3. Trong $\triangle SAK$, kẻ $AH \perp SK$. 4. Khoảng cách là $d(A, (SBC)) = AH$.
Chóp đều S.ABC	Đáy ABC là tam giác đều, chân đường cao H trùng với tâm đáy. Các cạnh bên bằng nhau.	1. Gọi M là trung điểm BC, H là tâm đáy. 2. Ta có $AM \perp BC$ và $SH \perp (ABC)$. 3. Trong $\triangle SHM$, kẻ $HK \perp SM$. 4. Khoảng cách là $d(H, (SBC)) = HK$.
Chóp có mặt bên vuông góc với đáy	$(SAB) \perp (ABCD)$ và $SA \perp AB$.	1. Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SA \perp AB$ (giao tuyến) nên $SA \perp (ABCD)$. Bài toán quay về dạng 1.

Việc nắm vững các định nghĩa, tính chất và đặc biệt là các phương pháp tính toán sẽ giúp học sinh giải quyết tốt các bài toán về khoảng cách trong không gian, một dạng toán thường xuất hiện trong các kỳ thi quan trọng.