

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VỀ TAM GIÁC CÂN

1. Định nghĩa tam giác cân

Định nghĩa: Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Cho tam giác ABC cân tại A, ta có:

- Hai cạnh bằng nhau AB và AC được gọi là **các cạnh bên**.
- Cạnh còn lại BC được gọi là **cạnh đáy**.
- Góc tạo bởi hai cạnh bên (góc A) được gọi là **góc ở đỉnh**.
- Hai góc còn lại (góc B và góc C) được gọi là **các góc ở đáy**.

Ví dụ 1: Cho tam giác MNP có $MN = MP = 5\text{cm}$, $NP = 4\text{cm}$. Tam giác MNP là tam giác cân tại M. Cạnh đáy là NP, góc ở đỉnh là góc M, hai góc ở đáy là góc N và góc P.

Ví dụ 2: Nếu tam giác DEF có $DE = DF$ thì tam giác DEF cân tại D.

2. Tính chất của tam giác cân

a. Tính chất về góc

Định lý 1: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Giải thích: Nếu một tam giác cân tại một đỉnh nào đó thì hai góc ở đáy (hai góc kề cạnh đáy) sẽ có số đo bằng nhau.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A, biết góc $A = 80^\circ$. Tính số đo góc B và góc C.

Giải:

Vì tam giác ABC cân tại A nên góc B = góc C (tính chất tam giác cân).

Xét tam giác ABC, ta có: góc A + góc B + góc C = 180° (tổng ba góc trong một tam giác).

$$80^\circ + 2 * \text{góc B} = 180^\circ$$

$$2 * \text{góc B} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\text{góc B} = 100^\circ / 2 = 50^\circ$$

Vậy góc B = góc C = 50° .

Ví dụ 2: Cho tam giác XYZ cân tại X, biết góc Y = 40° . Tính số đo các góc còn lại.

Giải:

Vì tam giác XYZ cân tại X nên góc Y = góc Z = 40° .

Xét tam giác XYZ, ta có: góc X + góc Y + góc Z = 180° .

$$\text{góc X} + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\text{góc X} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Vậy góc Z = 40° , góc X = 100° .

b. Tính chất về đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác

Định lý 2: Trong một tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung trực và đường cao xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

Giải thích: Nếu tam giác ABC cân tại A, và AM là đường trung tuyến (M là trung điểm BC), thì AM cũng là:

- Đường cao: $AM \perp BC$
- Đường phân giác: AM là tia phân giác của góc BAC
- Đường trung trực: AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC.

Giải:

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AC$ (giả thiết tam giác ABC cân tại A)

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC)

AM là cạnh chung

Do đó, $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c)

Suy ra góc BAM = góc CAM (hai góc tương ứng).

Vậy AM là tia phân giác của góc BAC.

3. Dấu hiệu nhận biết tam giác cân

Để chứng minh một tam giác là tam giác cân, ta có thể sử dụng một trong hai cách sau:

1. **Dấu hiệu 1 (Theo cạnh):** Nếu một tam giác có hai cạnh bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân. (Đây chính là định nghĩa).

2. Dấu hiệu 2 (Theo góc): Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Ví dụ 1: Cho tam giác GHK có góc $H = \text{góc } K = 55^\circ$. Hỏi tam giác GHK là tam giác gì?

Giải:

Xét tam giác GHK có góc $H = \text{góc } K = 55^\circ$. Theo dấu hiệu nhận biết, tam giác có hai góc bằng nhau là tam giác cân.

Vậy tam giác GHK cân tại G.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Kẻ DE song song với BC (E thuộc AB). Chứng minh tam giác BDE cân.

Giải:

Vì $DE \parallel BC$ nên góc $EDB = \text{góc } DBC$ (so le trong).

Vì BD là tia phân giác của góc B nên góc $EBD = \text{góc } DBC$.

Từ hai điều trên, suy ra góc $EDB = \text{góc } EBD$.

Vậy tam giác BDE cân tại E (dấu hiệu nhận biết tam giác cân).

4. Các trường hợp đặc biệt của tam giác cân

a. Tam giác vuông cân

- **Định nghĩa:** Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.
- **Tính chất:** Trong tam giác vuông cân, mỗi góc nhọn bằng 45° .

- **Dấu hiệu nhận biết:**

1. Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.
2. Tam giác vuông có một góc nhọn bằng 45° .
3. Tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 90° .

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc B = 45° . Tam giác ABC là tam giác gì?

Giải:

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: góc B + góc C = 90° .

$$45^\circ + \text{góc C} = 90^\circ \Rightarrow \text{góc C} = 45^\circ.$$

Vì góc B = góc C = 45° nên tam giác ABC cân tại A.

Kết hợp với tam giác ABC vuông tại A, ta kết luận tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

b. Tam giác đều

- **Định nghĩa:** Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

- **Tính chất:** Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60° .

- **Dấu hiệu nhận biết:**

1. Tam giác có ba cạnh bằng nhau.
2. Tam giác có ba góc bằng nhau.
3. Tam giác cân có một góc bằng 60° .

Ví dụ: Cho tam giác MNP cân tại M có góc $N = 60^\circ$. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

Giải:

Vì tam giác MNP cân tại M nên góc $N = \text{góc } P = 60^\circ$.

Xét tam giác MNP, ta có: góc M + góc N + góc P = 180° .

$$\text{góc } M + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \text{góc } M = 60^\circ.$$

Vì tam giác MNP có ba góc đều bằng 60° nên nó là tam giác đều.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tính số đo góc của tam giác cân

Phương pháp: Áp dụng tính chất tổng ba góc của một tam giác bằng 180° và tính chất hai góc ở đáy của tam giác cân bằng nhau.

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A. Biết góc ngoài tại đỉnh C bằng 125° . Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Giải:

Gọi góc ngoài tại đỉnh C là góc ACx. Ta có góc ACx + góc ACB = 180° (hai góc kề bù).

$$125^\circ + \text{góc } ACB = 180^\circ \Rightarrow \text{góc } ACB = 55^\circ.$$

Vì tam giác ABC cân tại A nên góc ABC = góc ACB = 55° .

Tổng ba góc trong tam giác ABC: góc BAC + góc ABC + góc ACB = 180° .

$$\text{góc } BAC + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow \text{góc } BAC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

Vậy góc $A = 70^\circ$, góc $B = 55^\circ$, góc $C = 55^\circ$.

Dạng 2: Chứng minh một tam giác là tam giác cân

Phương pháp: Sử dụng một trong hai dấu hiệu nhận biết:

- Chứng minh tam giác có hai cạnh bằng nhau.
- Chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có góc $A = 120^\circ$, đường phân giác AD . Từ D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC , cắt AC tại E và AB tại F . Chứng minh tam giác DEF cân.

Giải:

Tứ giác $AFDE$ là hình bình hành (vì có các cặp cạnh đối song song). Do đó, $AF = DE$ và $AE = DF$.

Vì AD là phân giác góc A nên góc $FAD = \text{góc } EAD = 120^\circ/2 = 60^\circ$.

Vì $DE \parallel AB$ nên góc $EDA = \text{góc } FAD = 60^\circ$ (so le trong).

Vì $DF \parallel AC$ nên góc $FDA = \text{góc } EAD = 60^\circ$ (so le trong).

Xét tam giác DEF có góc $EDF = \text{góc } EDA + \text{góc } FDA = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Trong tam giác ADF , vì $DF \parallel AC$ nên góc $AFD = \text{góc } BAC = 120^\circ$ (đồng vị). Góc $FAD = 60^\circ$, suy ra góc $ADF = 180 - 120 - 60 = 0$ (vô lý). Ta cần xem lại cách giải.

Cách giải đúng:

Xét tứ giác $AEDF$ có $AE \parallel DF$ và $AF \parallel DE$ nên $AEDF$ là hình bình hành.

Suy ra $AE = DF$.

AD là phân giác góc A nên góc $CAD =$ góc BAD .

Vì $DE \parallel AB$ nên góc $EDA =$ góc BAD (so le trong).

Suy ra góc $EDA =$ góc CAD .

Do đó tam giác ADE cân tại $E \Rightarrow AE = ED$.

Mà $AE = DF$ (chứng minh trên) nên $ED = DF$.

Vậy tam giác DEF cân tại D .

Dạng 3: Vận dụng tính chất của tam giác cân

Phương pháp: Từ một tam giác cân cho trước, suy ra các cạnh bên bằng nhau hoặc các góc ở đáy bằng nhau để sử dụng trong các bước chứng minh tiếp theo.

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M , trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

Giải:

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$ và góc $ABC =$ góc ACB .

Ta có góc $ABM +$ góc $ABC = 180^\circ$ (kề bù).

Ta có góc $ACN +$ góc $ACB = 180^\circ$ (kề bù).

Vì góc $ABC =$ góc ACB nên góc $ABM =$ góc ACN .

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có:

$AB = AC$ (giả thiết)

góc ABM = góc ACN (chứng minh trên)

BM = CN (giả thiết)

Do đó, $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c).

Suy ra AM = AN (hai cạnh tương ứng).

Vậy tam giác AMN là tam giác cân tại A.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 1:** Cho tam giác ABC cân tại A, biết góc ở đỉnh A bằng 40° . Tính số đo góc ở đáy.
- Bài 2:** Một tam giác có góc ở đáy bằng 35° . Tam giác đó có phải là tam giác cân không? Nếu có, hãy tính góc ở đỉnh.
- Bài 3:** Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB tại D và AC tại E. Chứng minh rằng tam giác BDI và tam giác CEI là các tam giác cân.
- Bài 4:** Cho tam giác ABC cân tại A (góc A 90°). Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$), $CK \perp AB$ ($K \in AB$). Chứng minh rằng $AH = AK$.

Gợi ý trả lời:

- Góc B = Góc C = $(180^\circ - 40^\circ)/2 = 70^\circ$.
- Phải. Góc ở đỉnh = $180^\circ - (2 * 35^\circ) = 110^\circ$.
- Sử dụng tính chất so le trong và tính chất tia phân giác để chứng minh góc DBI = góc DIB và góc ECI = góc EIC.
- Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACK$ (cạnh huyền - góc nhọn) để suy ra $AH = AK$.