

PHẦN A: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. Giới hạn hữu hạn của dãy số

1. Dãy số có giới hạn 0

Định nghĩa: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: **$\lim u_n = 0$** hoặc **$u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$** .

Ví dụ 1: Chứng minh $\lim(1/n) = 0$.

Giải: Để $|1/n| < \varepsilon$ (với ε là số dương bé tùy ý), ta cần $n > 1/\varepsilon$. Vậy kể từ số hạng thứ $[1/\varepsilon] + 1$ trở đi, $|1/n|$ luôn nhỏ hơn ε . Do đó, $\lim(1/n) = 0$.

Ví dụ 2: Dãy số $u_n = (-1)^n / n$ có giới hạn là 0 vì $|u_n| = |(-1)^n / n| = 1/n$, và $\lim(1/n) = 0$.

2. Dãy số có giới hạn hữu hạn L

Định nghĩa: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là L khi $n \rightarrow +\infty$, nếu **$\lim(u_n - L) = 0$** .

Kí hiệu: **$\lim u_n = L$** hoặc **$u_n \rightarrow L$ khi $n \rightarrow +\infty$** .

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy số $u_n = (2n + 1) / n$.

Giải: Ta có $u_n = 2 + 1/n$. Xét $\lim(u_n - 2) = \lim(1/n) = 0$. Vậy $\lim u_n = 2$.

3. Một số giới hạn đặc biệt

- **$\lim(1/n) = 0$**
- **$\lim(1/n^k) = 0$** (với k là số nguyên dương)

- $\lim(c) = c$ (với c là hằng số)

- $\lim(q^n) = 0$ nếu $|q| < 1$

4. Định lí về giới hạn hữu hạn

Nếu $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là hằng số, ta có:

- $\lim(u_n + v_n) = L + M$

- $\lim(u_n - v_n) = L - M$

- $\lim(u_n \cdot v_n) = L \cdot M$

- $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot L$

- $\lim(u_n / v_n) = L / M$ (nếu $M \neq 0$)

- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim(\sqrt{u_n}) = \sqrt{L}$

Ví dụ: Tính $\lim (3n^2 - 2n + 1) / (n^2 + 4)$.

Giải: Chia cả tử và mẫu cho n^2 , ta được:

$$\lim (3 - 2/n + 1/n^2) / (1 + 4/n^2) = (\lim 3 - \lim(2/n) + \lim(1/n^2)) / (\lim 1 + \lim(4/n^2)) = (3 - 0 + 0) / (1 + 0) = 3.$$

5. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$, được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Công thức tổng: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = u_1 / (1 - q)$

Ví dụ: Tính tổng $S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$

Giải: Đây là cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = 1/2$.

Vậy $S = 1 / (1 - 1/2) = 2$.

II. Giới hạn vô cực của dãy số

1. Định nghĩa

- Dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: **$\lim u_n = +\infty$** .
- Dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$. Kí hiệu: **$\lim u_n = -\infty$** .

2. Một số giới hạn đặc biệt

- $\lim(n^k) = +\infty$** (với k là số nguyên dương)
- $\lim(q^n) = +\infty$** (nếu $q > 1$)

3. Quy tắc tính giới hạn vô cực

Quy tắc nhân:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n.v_n)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc chia (dạng $L/0$):

$\lim u_n$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim (u_n/v_n)$
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

Ví dụ 1: Tính $\lim(n^3 - 2n^2 + 1)$.

Giải: $\lim(n^3 - 2n^2 + 1) = \lim [n^3(1 - 2/n + 1/n^3)]$. Vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim(1 - 2/n + 1/n^3) = 1 > 0$, nên giới hạn bằng $+\infty$.

Ví dụ 2: Tính $\lim(2 - 3^n)$.

Giải: $\lim(2 - 3^n) = \lim [3^n(2/3^n - 1)]$. Vì $\lim 3^n = +\infty$ và $\lim(2/3^n - 1) = -1 < 0$, nên giới hạn bằng $-\infty$.

PHẦN B: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 . Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy số (x_n) trong $(a; b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Kí hiệu: **$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$** .

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Tương tự như giới hạn dãy số, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, ta có:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) / g(x)] = L / M$ (nếu $M \neq 0$)

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1)$.

Giải: Đây là hàm đa thức, xác định tại mọi x . Ta có thể thay trực tiếp giá trị $x = 2$ vào hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1) = 2^2 + 3(2) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9.$$

3. Giới hạn một phía

- **Giới hạn bên phải:** $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- **Giới hạn bên trái:** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Định lí: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

II. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ nếu với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \rightarrow +\infty$, ta đều có $f(x_n) \rightarrow L$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ nếu với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \rightarrow -\infty$, ta đều có $f(x_n) \rightarrow L$.

Một số giới hạn đặc biệt:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$ (c là hằng số)

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c/x^k = 0$ (c là hằng số, k là số nguyên dương)

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 5) / (3x^2 + 1)$.

Giải: Chia cả tử và mẫu cho x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 1/x + 5/x^2) / (3 + 1/x^2) = (2 - 0 + 0) / (3 + 0) = 2/3.$$

III. Giới hạn vô cực của hàm số

Các định nghĩa và quy tắc tính giới hạn vô cực của hàm số tương tự như giới hạn vô cực của dãy số. Các quy tắc nhân, chia được áp dụng tương tự.

Một số giới hạn đặc biệt:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ (k nguyên dương)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ (k nguyên dương, chẵn)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ (k nguyên dương, lẻ)
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} 1/(x-x_0) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} 1/(x-x_0) = -\infty$

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$.

Giải: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3(1 + 2/x - 1/x^3)]$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2/x - 1/x^3) = 1 > 0$, nên giới hạn bằng $-\infty$.

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) / (x - 1)$.

Giải: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 > 0$.

Khi $x \rightarrow 1^+$, thì $x > 1$, suy ra $x - 1 > 0$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0^+$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) / (x - 1) = +\infty$.

PHẦN C: HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ tại $x_0 = 3$.

Giải:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- $f(3) = 3^2 - 2(3) = 3$.

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x) = 3^2 - 2(3) = 3$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, nên hàm số liên tục tại $x_0 = 3$.

II. Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Định lí về tính liên tục của các hàm số cơ bản:

- Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

3. Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó.

III. Định lí giá trị trung gian

Phát biểu: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ý nghĩa: Định lí này khẳng định nếu một hàm số liên tục trên một đoạn và có giá trị trái dấu ở hai đầu mút thì đồ thị của nó phải cắt trục hoành tại ít nhất một điểm nằm giữa hai đầu mút đó. Định lí này thường được dùng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình.

Ví dụ: Chứng minh phương trình $x^3 + 3x - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải:

- Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 5$. Đây là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Ta chọn đoạn $[1; 2]$. Hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$.
- Ta có: $f(1) = 1^3 + 3(1) - 5 = -1$.
- Ta có: $f(2) = 2^3 + 3(2) - 5 = 8 + 6 - 5 = 9$.
- Vì $f(1) \cdot f(2) = (-1) \cdot 9 = -9 < 0$, nên theo định lí giá trị trung gian, tồn tại ít nhất một số $c \in (1; 2)$ sao cho $f(c) = 0$.
- Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.