

Tổng hợp phương pháp tìm nguyên hàm: Đổi biến số và Từng phần

Khi các công thức nguyên hàm cơ bản không thể áp dụng trực tiếp, chúng ta cần sử dụng các kỹ thuật nâng cao hơn. Hai phương pháp phổ biến và hiệu quả nhất là phương pháp đổi biến số và phương pháp nguyên hàm từng phần.

I. Phương pháp đổi biến số

Nguyên tắc chung: Biến đổi nguyên hàm cần tính thành một nguyên hàm khác đơn giản hơn bằng cách đổi biến.

1. Dạng 1: Đặt $t = u(x)$

Phương pháp này dựa trên định lý: **Nếu $\int f(t)dt = F(t) + C$ thì $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$.**

a. Phương pháp giải

- Bước 1:** Chọn một biểu thức trong hàm số dưới dấu tích phân để đặt $t = u(x)$. Dấu hiệu nhận biết là trong biểu thức có cả $u(x)$ và đạo hàm của nó là $u'(x)$.
- Bước 2:** Tính vi phân hai vế: $dt = u'(x)dx$.
- Bước 3:** Biểu diễn hàm số $f(x)$ và dx theo t và dt . Ta được nguyên hàm mới: $I = \int g(t)dt$.
- Bước 4:** Tính nguyên hàm theo biến t . Giả sử kết quả là $G(t) + C$.

5. **Bước 5:** Trả lại biến cũ x bằng cách thay $t = u(x)$. Kết quả cuối cùng là $I = G(u(x)) + C$.

b. Ví dụ minh họa

• **Ví dụ 1:** Tính $I = \int (2x + 1)(x^2 + x)^3 dx$

Phân tích: Ta thấy $(x^2 + x)' = 2x + 1$. Do đó, ta đặt $t = x^2 + x$.

Giải:

1. Đặt $t = x^2 + x$.
2. Lấy vi phân: $dt = (2x + 1)dx$.
3. Thay vào nguyên hàm: $I = \int t^3 dt$.
4. Tính nguyên hàm theo t : $I = t^4/4 + C$.
5. Trả lại biến x : $I = (x^2 + x)^4/4 + C$.

• **Ví dụ 2:** Tính $J = \int \cos(x)\sin^4(x) dx$

Phân tích: Ta thấy $(\sin(x))' = \cos(x)$. Do đó, ta đặt $t = \sin(x)$.

Giải:

1. Đặt $t = \sin(x)$.
2. Lấy vi phân: $dt = \cos(x)dx$.
3. Thay vào nguyên hàm: $J = \int t^4 dt$.
4. Tính nguyên hàm theo t : $J = t^5/5 + C$.
5. Trả lại biến x : $J = \sin^5(x)/5 + C$.

• **Ví dụ 3:** Tính $K = \int (\ln x)/x \, dx$

Phân tích: Ta thấy $(\ln x)' = 1/x$. Do đó, ta đặt $t = \ln x$.

Giải:

1. Đặt $t = \ln x$.
2. Lấy vi phân: $dt = (1/x)dx$.
3. Thay vào nguyên hàm: $K = \int t \, dt$.
4. Tính nguyên hàm theo t : $K = t^2/2 + C$.
5. Trả lại biến x : $K = (\ln^2 x)/2 + C$.

2. Dạng 2: Đặt $x = u(t)$ (Phương pháp lượng giác hóa)

Phương pháp này thường được sử dụng để khử các biểu thức chứa căn thức hoặc các mẫu số phức tạp bằng cách sử dụng các công thức lượng giác.

a. Dấu hiệu nhận biết và cách đặt

Ta thường dựa vào các biểu thức đặc trưng để chọn cách đặt phù hợp:

Dấu hiệu (biểu thức trong hàm)	Cách đặt biến	Điều kiện của t
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot \sin(t)$ hoặc $x = a \cdot \cos(t)$	$t \in [-\pi/2, \pi/2]$ hoặc $t \in [0, \pi]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a/\sin(t)$ hoặc $x = a/\cos(t)$	$t \in [-\pi/2, \pi/2], t \neq 0$ hoặc $t \in [0, \pi], t \neq \pi/2$
$\sqrt{x^2 + a^2}$ hoặc $(x^2 + a^2)$	$x = a \cdot \tan(t)$	$t \in (-\pi/2, \pi/2)$

b. Ví dụ minh họa

- **Ví dụ 1:** Tính $I = \int dx / \sqrt{4 - x^2}$

Phân tích: Biểu thức có dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$ với $a = 2$.

Giải:

1. Đặt $x = 2\sin(t)$ với $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
2. Lấy vi phân: $dx = 2\cos(t)dt$.
3. Thay vào nguyên hàm: $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2(t)} = \sqrt{4\cos^2(t)} = 2|\cos(t)|$. Vì $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ nên $\cos(t) \geq 0$, do đó $2|\cos(t)| = 2\cos(t)$.
4. Ta có: $I = \int (2\cos(t)dt) / (2\cos(t)) = \int dt = t + C$.
5. Trả lại biến x: Từ $x = 2\sin(t)$, suy ra $\sin(t) = x/2$, vậy $t = \arcsin(x/2)$.
6. Kết quả: $I = \arcsin(x/2) + C$.

- **Ví dụ 2:** Tính $J = \int dx / (x^2 + 9)$

Phân tích: Biểu thức có dạng $x^2 + a^2$ với $a = 3$.

Giải:

1. Đặt $x = 3\tan(t)$ với $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.
2. Lấy vi phân: $dx = 3(1 + \tan^2(t))dt = 3/\cos^2(t) dt$.
3. Thay vào nguyên hàm: $x^2 + 9 = 9\tan^2(t) + 9 = 9(\tan^2(t) + 1)$.
4. Ta có: $J = \int (3(1 + \tan^2(t))dt) / (9(\tan^2(t) + 1)) = \int (1/3)dt = (1/3)t + C$.
5. Trả lại biến x : Từ $x = 3\tan(t)$, suy ra $\tan(t) = x/3$, vậy $t = \arctan(x/3)$.
6. Kết quả: $J = (1/3)\arctan(x/3) + C$.

II. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Nguyên tắc chung: Dựa trên công thức đạo hàm của một tích $(u.v)' = u'v + uv'$, phương pháp này giúp chuyển một nguyên hàm phức tạp thành một nguyên hàm đơn giản hơn.

1. Công thức

Công thức nguyên hàm từng phần: $\int u dv = uv - \int v du$

2. Phương pháp giải

1. **Bước 1:** Tách biểu thức dưới dấu tích phân $f(x)dx$ thành hai phần u và dv .
2. **Bước 2:** Đặt $u = f(x)$ và $dv = g(x)dx$.
3. **Bước 3:** Từ u , tính vi phân $du = u'(x)dx$. Từ dv , tìm một nguyên hàm $v = \int dv = \int g(x)dx$. (Lưu ý: khi tìm v , ta chọn $C=0$ cho đơn giản).

4. **Bước 4:** Áp dụng công thức $\int u dv = uv - \int v du$.

Mục tiêu: Việc chọn u và dv phải sao cho nguyên hàm $\int v du$ ở vế phải đơn giản hơn hoặc có thể tính được dễ dàng hơn so với nguyên hàm ban đầu.

3. Quy tắc đặt u và dv

Để chọn u và dv một cách hiệu quả, ta thường dùng quy tắc ưu tiên đặt u theo thứ tự: "**Nhất Log, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ**".

- **Nhất Log:** Nếu có hàm logarit ($\ln x$, $\log_a x$), ưu tiên đặt u là hàm logarit.
- **Nhì Đa:** Nếu không có log, nhưng có hàm đa thức (x , x^2 , $ax+b$,...), ưu tiên đặt u là hàm đa thức.
- **Tam Lượng:** Nếu không có log và đa thức, nhưng có hàm lượng giác ($\sin x$, $\cos x$,...), ưu tiên đặt u là hàm lượng giác.
- **Tứ Mũ:** Nếu chỉ còn hàm mũ (e^x , a^x), đặt u là hàm mũ.

Phần còn lại của biểu thức $f(x)dx$ sẽ là dv .

4. Các dạng bài tập thường gặp

a. Dạng 1: Tích của Đa thức và Logarit

Phương pháp: Đặt $u = \ln x$ (hoặc $\log_a x$), $dv = P(x)dx$.

- **Ví dụ 1:** Tính $I = \int x \cdot \ln x \, dx$

Giải:

Theo quy tắc "Nhất Log", ta đặt:

- $u = \ln x \Rightarrow du = (1/x)dx$

$$\circ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = x^2/2$$

Áp dụng công thức:

$$I = uv - \int v du = (\ln x)(x^2/2) - \int (x^2/2)(1/x)dx$$

$$I = (x^2 \ln x)/2 - (1/2) \int x dx$$

$$I = (x^2 \ln x)/2 - (1/2)(x^2/2) + C = (x^2 \ln x)/2 - x^2/4 + C.$$

b. Dạng 2: Tích của Đa thức và Lượng giác (hoặc Mũ)

Phương pháp: Đặt $u = P(x)$, dv là phần còn lại.

- **Ví dụ 2:** Tính $J = \int x \cdot \cos(x) dx$

Giải:

Theo quy tắc "Nhì Đa", ta đặt:

$$\circ u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\circ dv = \cos(x)dx \Rightarrow v = \int \cos(x)dx = \sin(x)$$

Áp dụng công thức:

$$J = uv - \int v du = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)dx$$

$$J = x \cdot \sin(x) - (-\cos(x)) + C = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C.$$

c. Dạng 3: Tích của Mũ và Lượng giác (Nguyên hàm lặp)

Phương pháp: Đặt u là hàm lượng giác (hoặc hàm mũ). Sau khi từng phần 2 lần, nguyên hàm ban đầu sẽ xuất hiện lại. Ta chuyển vế để tìm kết quả.

- **Ví dụ 3:** Tính $K = \int e^x \cdot \sin(x) dx$

Giải:

Lần 1: Đặt:

- $u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x)dx$
- $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$K = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$. Đặt $K_1 = \int e^x \cos(x) dx$.

Lần 2: Tính K_1 bằng phương pháp từng phần:

- $u' = \cos(x) \Rightarrow du' = -\sin(x)dx$
- $dv' = e^x dx \Rightarrow v' = e^x$

$K_1 = e^x \cos(x) - \int e^x (-\sin(x)) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx = e^x \cos(x) + K$.

Thay K_1 vào biểu thức của K :

$$K = e^x \sin(x) - (e^x \cos(x) + K)$$

$$K = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - K$$

$$2K = e^x (\sin(x) - \cos(x))$$

$$K = (e^x/2)(\sin(x) - \cos(x)) + C.$$

III. Tổng kết và Lời khuyên

- **Khi nào dùng Đổi biến số?** Khi biểu thức dưới dấu tích phân chứa một hàm số $u(x)$ và đạo hàm $u'(x)$ của nó, hoặc khi có các dạng căn thức, mẫu số đặc biệt có thể lượng giác hóa.

- **Khi nào dùng Từng phần?** Khi biểu thức là tích của hai loại hàm khác nhau (logarit, đa thức, lượng giác, mũ). Hãy nhớ quy tắc "Nhất Log, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ".
- **Luyện tập:** Chìa khóa để thành thạo hai phương pháp này là nhận dạng đúng dạng toán và thực hành giải nhiều bài tập. Đôi khi một bài toán có thể yêu cầu kết hợp cả hai phương pháp.