

Tổng hợp kiến thức: Phép Tịnh tiến và Phép Quay

Chuyên đề này cung cấp toàn bộ kiến thức lý thuyết và các dạng bài tập cơ bản về phép tịnh tiến và phép quay trong chương trình Hình học lớp 11, giúp học sinh ôn tập và củng cố kiến thức một cách hiệu quả.

PHẦN I: PHÉP TỊNH TIẾN

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng, cho một vector $\vec{v}$. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\vec{MM'} = \vec{v}$.

- **Ký hiệu:** $T_{\vec{v}}(M) = M'$
- $\vec{v}$ được gọi là vector tịnh tiến.

2. Tính chất

Phép tịnh tiến là một phép dời hình, do đó nó có các tính chất sau:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ: Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$ và $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $MN = M'N'$.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng nó.

- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

3. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ tịnh tiến $\vec{v} = (a; b)$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$.

Công thức:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Ví dụ minh họa

1. Ví dụ 1: Tìm ảnh của một điểm.

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2; -3)$ và vectơ $\vec{v} = (-1; 5)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải:

Gọi $A'(x'; y')$ là ảnh của A qua $T_{\vec{v}}$. Áp dụng biểu thức tọa độ, ta có:

$$\begin{cases} x' = 2 + (-1) = 1 \\ y' = -3 + 5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2 + (-1) = 1 \\ y' = -3 + 5 = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm A' là $(1; 2)$.

2. Ví dụ 2: Tìm ảnh của một đường thẳng.

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x - 3y + 5 = 0$ và vectơ $\vec{v} = (3; -1)$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải:

Cách 1: Dùng biểu thức tọa độ.

Lấy một điểm $M(x; y)$ bất kỳ thuộc d . Gọi $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$. Ta có:

$$\begin{cases} x = x' - a = x' - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y' - b = y' - (-1) = y' + 1 \end{cases}$$

Vì M thuộc d nên tọa độ của M thỏa mãn phương trình của d . Thay x, y vào phương trình d :

$$2(x' - 3) - 3(y' + 1) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - 6 - 3y' - 3 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - 3y' - 4 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng d' là $2x - 3y - 4 = 0$.

Cách 2: Dùng tính chất.

Vì d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến nên d' song song hoặc trùng với d . Do đó, d' có phương trình dạng $2x - 3y + C = 0$.

Chọn một điểm $A(-1; 1)$ thuộc d . Tìm ảnh A' của A qua $T_{\vec{v}}$:

$$\begin{cases} x' = -1 + 3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = 1 + (-1) = 0 \end{cases}$$

Vậy $A'(2; 0)$. Vì A' thuộc d' nên tọa độ A' thỏa mãn phương trình d' :

$$2(2) - 3(0) + C = 0 \Leftrightarrow C = -4.$$

Vậy phương trình d' là $2x - 3y - 4 = 0$.

3. Ví dụ 3: Tìm ảnh của một đường tròn.

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ và vectơ $\vec{v} = (-2; 4)$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$.

$\vec{v}'$

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi $I'(x'; y')$ là ảnh của I qua $T_{\vec{v}}$. Ta có:

$$\{ x' = 1 + (-2) = -1$$

$$\{ y' = -2 + 4 = 2$$

Vậy tâm của (C') là $I'(-1; 2)$.

Phép tịnh tiến bảo toàn bán kính nên bán kính của (C') là $R' = R = 3$.

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

PHẦN II: PHÉP QUAY

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng, cho một điểm O cố định và một góc lượng giác α không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác $(OM, OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O , góc quay α .

- **Ký hiệu:** $Q_{(O, \alpha)}(M) = M'$
- **O :** tâm quay.
- **α :** góc quay ($\alpha > 0$: chiều dương - ngược chiều kim đồng hồ; $\alpha < 0$: chiều âm - cùng chiều kim đồng hồ).

2. Tính chất

Phép quay cũng là một phép dời hình, do đó nó có các tính chất tương tự phép tịnh tiến:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng nó.
- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

3. Biểu thức tọa độ của phép quay

3.1. Phép quay tâm O(0, 0)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép quay $Q_{(O, \alpha)}$ biến điểm $M(x; y)$ thành $M'(x'; y')$.

Công thức tổng quát:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

Các trường hợp đặc biệt:

Góc quay α	Biểu thức tọa độ
$\alpha = 90^\circ$ (hoặc $\pi/2$)	$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
$\alpha = -90^\circ$ (hoặc $-\pi/2$)	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$
$\alpha = 180^\circ$ (hoặc π)	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ (Đây cũng là phép đối xứng tâm O)

Ví dụ minh họa (tâm O)

1. Ví dụ 1: Tìm ảnh của một điểm.

Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh của điểm $M(3; 4)$ qua phép quay tâm O, góc quay 90° .

Giải:

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua $Q_{(O, 90^\circ)}$. Áp dụng công thức đặc biệt:

$$\{ x' = -y = -4$$

$$\{ y' = x = 3$$

Vậy $M'(-4; 3)$.

2. Ví dụ 2: Tìm ảnh của một đường thẳng.

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: x + 2y - 4 = 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$.

Giải:

Lấy $M(x; y)$ bất kỳ thuộc d . Gọi $M'(x'; y') = Q_{(O, 90^\circ)}(M)$. Ta có:

$$\{ x' = -y \Rightarrow y = -x'$$

$$\{ y' = x \Rightarrow x = y'$$

Thay x, y vào phương trình của d :

$$(y') + 2(-x') - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x' + y' - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - y' + 4 = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng d' là $2x - y + 4 = 0$.

3.2. Phép quay tâm $I(a, b)$ bất kỳ

Để tìm ảnh $M'(x'; y')$ của $M(x; y)$ qua phép quay tâm $I(a; b)$ góc quay α , ta có thể thực hiện theo các bước sau (dời hệ trục tọa độ):

1. Tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = -\vec{OI}$ để đưa tâm quay I về gốc tọa độ O .
2. Thực hiện phép quay tâm O góc α .
3. Tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \vec{OI}$ để đưa O về lại I .

Công thức tổng quát:

$$\begin{cases} x' - a = (x - a) \cdot \cos(\alpha) - (y - b) \cdot \sin(\alpha) \\ y' - b = (x - a) \cdot \sin(\alpha) + (y - b) \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

Ví dụ minh họa (tâm I bất kỳ)

1. Ví dụ: Tìm ảnh của một điểm.

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M(5; 3) và điểm I(1; 1). Tìm ảnh M' của M qua phép quay tâm I, góc quay -90° .

Giải:

Gọi M'(x'; y'). Áp dụng công thức với $a=1$, $b=1$, $\alpha = -90^\circ$ ($\cos(-90^\circ)=0$, $\sin(-90^\circ)=-1$):

$$\begin{cases} x' - 1 = (5 - 1) \cdot \cos(-90^\circ) - (3 - 1) \cdot \sin(-90^\circ) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' - 1 = (5 - 1) \cdot \sin(-90^\circ) + (3 - 1) \cdot \cos(-90^\circ) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - 1 = 4 \cdot (0) - 2 \cdot (-1) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' - 1 = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (0) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -3 \end{cases}$$

Vậy M'(3; -3).

PHẦN III: BẢNG SO SÁNH

Tiêu chí	Phép Tịnh tiến	Phép Quay
Yếu tố xác định	Một vectơ tịnh tiến $\vec{v}$.	Một tâm quay O và một góc quay α .
Tính chất chung	Đều là phép dời hình: bảo toàn khoảng cách, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.	
Ảnh của đường thẳng d	Là đường thẳng d' song song hoặc trùng với d.	Là đường thẳng d' hợp với d một góc α (trừ trường hợp d đi qua tâm quay).
Điểm bất động	Không có điểm bất động (nếu $\vec{v} \neq \vec{0}$). Mọi điểm đều bất động (nếu $\vec{v} = \vec{0}$).	Tâm quay O là điểm bất động duy nhất (nếu $\alpha \neq k2\pi$).