

Chuyên đề: Căn thức bậc hai và các phép biến đổi

Đây là tài liệu tổng hợp toàn bộ kiến thức nền tảng và nâng cao về chuyên đề căn thức bậc hai trong chương trình Toán lớp 9. Nắm vững các khái niệm và phép biến đổi này không chỉ giúp giải quyết các bài toán đại số mà còn là công cụ quan trọng trong việc giải các bài toán Vật Lý, Hóa Học.

I. Kiến thức cơ bản cần nắm vững

1. Căn bậc hai số học

- **Định nghĩa:** Với số không âm a , căn bậc hai số học của a là số x không âm sao cho $x^2 = a$. Ký hiệu là $\sqrt{a}$.
- **Giải thích:** Phép khai phương là phép toán ngược của phép bình phương. Kết quả của một căn bậc hai số học luôn là một số không âm.
- **Ví dụ:**
 1. $\sqrt{16} = 4$ (vì $4 \geq 0$ và $4^2 = 16$)
 2. $\sqrt{0.49} = 0.7$ (vì $0.7 \geq 0$ và $0.7^2 = 0.49$)
 3. Số -5 không có căn bậc hai số học vì không có số thực nào bình phương lên bằng -5 .

2. So sánh các căn bậc hai số học

- **Công thức:** Với hai số a, b không âm, ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

- **Giải thích:** Với các số không âm, số nào lớn hơn thì căn bậc hai số học của nó cũng lớn hơn và ngược lại.

- **Ví dụ:**

1. So sánh 3 và $\sqrt{8}$: Ta có $3 = \sqrt{9}$. Vì $9 > 8$ nên $\sqrt{9} > \sqrt{8}$. Vậy $3 > \sqrt{8}$.
2. So sánh $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$: Ta đưa 2 vào trong dấu căn: $2\sqrt{5} = \sqrt{(2^2 * 5)} = \sqrt{20}$. Vì $20 > 19$ nên $\sqrt{20} > \sqrt{19}$. Vậy $2\sqrt{5} > \sqrt{19}$.

3. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- **Công thức:** $\sqrt{A^2} = |A|$

- **Giải thích:** Đây là một trong những hằng đẳng thức quan trọng nhất. Căn bậc hai của một biểu thức bình phương bằng giá trị tuyệt đối của biểu thức đó.

- Nếu $A \geq 0$ thì $|A| = A$.
- Nếu $A < 0$ thì $|A| = -A$.

- **Ví dụ:**

1. $\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = |\sqrt{5} - 2|$. Vì $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ nên $\sqrt{5} - 2 > 0$. Do đó, $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$.
2. $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}|$. Vì $\sqrt{1} < \sqrt{3}$ nên $1 - \sqrt{3} < 0$. Do đó, $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$.
3. Rút gọn $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ với $x \geq 1/2$: Ta có $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$. Vì $x \geq 1/2$ nên $2x \geq 1$, suy ra $2x - 1 \geq 0$. Vậy $|2x - 1| = 2x - 1$.

II. Điều kiện xác định (có nghĩa) của căn thức

- **Công thức:** Biểu thức $\sqrt{A}$ có nghĩa (hay xác định) khi và chỉ khi $A \geq 0$.
- **Giải thích:** Biểu thức dưới dấu căn bậc hai phải luôn là một số không âm.

- **Ví dụ:**

1. Tìm x để $\sqrt{3x - 6}$ có nghĩa: Biểu thức có nghĩa khi $3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$.
2. Tìm x để $\sqrt{5 / (2 - x)}$ có nghĩa: Biểu thức có nghĩa khi $5 / (2 - x) \geq 0$. Vì $5 > 0$ nên điều này xảy ra khi $2 - x > 0$ (mẫu không được bằng 0) $\Leftrightarrow x < 2$.

III. Các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- **Công thức:** $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).
- **Giải thích:** Nếu một thừa số dưới dấu căn có dạng bình phương, ta có thể đưa thừa số đó ra ngoài dấu căn bằng cách lấy giá trị tuyệt đối của nó.

- **Ví dụ:**

1. $\sqrt{50} = \sqrt{(25 * 2)} = \sqrt{(5^2 * 2)} = 5\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{(28x^4y^2)}$ với $y \geq 0$: Ta có $\sqrt{(4x^4y^2 * 7)} = \sqrt{((2x^2y)^2 * 7)} = |2x^2y| \sqrt{7}$. Vì $x^2 \geq 0$ và $y \geq 0$ nên $2x^2y \geq 0$. Do đó, $|2x^2y| = 2x^2y$. Kết quả là $2x^2y\sqrt{7}$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- **Công thức:**

- Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$, ta có: $A\sqrt{B} = \sqrt{(A^2B)}$.
- Với $A < 0$ và $B \geq 0$, ta có: $A\sqrt{B} = -\sqrt{(A^2B)}$.

- **Giải thích:** Đây là phép toán ngược lại. Khi đưa một thừa số vào trong dấu căn, ta phải bình phương nó lên. Chú ý đến dấu của thừa số đó.

- **Ví dụ:**

1. $3\sqrt{7} = \sqrt{(3^2 * 7)} = \sqrt{(9 * 7)} = \sqrt{63}$.
2. $-5\sqrt{2} = -\sqrt{(5^2 * 2)} = -\sqrt{(25 * 2)} = -\sqrt{50}$.
3. $x\sqrt{(3/x)}$ với $x > 0$: Ta có $x\sqrt{(3/x)} = \sqrt{(x^2 * 3/x)} = \sqrt{3x}$.

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

- **Công thức:** $\sqrt{(A/B)} = (\sqrt{AB}) / |B|$ (với $AB \geq 0$ và $B \neq 0$).

- **Giải thích:** Để khử mẫu trong dấu căn, ta nhân cả tử và mẫu của biểu thức dưới dấu căn với chính mẫu số đó.

- **Ví dụ:**

1. $\sqrt{(3/7)} = \sqrt{((3*7) / (7*7))} = \sqrt{(21 / 7^2)} = (\sqrt{21}) / 7$.
2. $\sqrt{(5a / 2b)}$ với $a > 0$, $b > 0$: Ta có $\sqrt{((5a * 2b) / (2b * 2b))} = \sqrt{(10ab / (2b)^2)} = (\sqrt{10ab}) / |2b| = (\sqrt{10ab}) / 2b$.

4. Trục căn thức ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu là làm mất dấu căn ở mẫu số bằng cách nhân cả tử và mẫu với một biểu thức thích hợp (gọi là biểu thức liên hợp).

Dạng mẫu số	Biểu thức nhân liên hợp	Công thức	Ví dụ
$\sqrt{B} \text{ (} B > 0 \text{)}$	$\sqrt{B}$	$A / \sqrt{B} = (A\sqrt{B}) / B$	$6/\sqrt{3} = (6\sqrt{3}) / 3 = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$	$\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$	$C / (\sqrt{A} \pm \sqrt{B}) = C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}) / (A - B)$	$2 / (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2(\sqrt{5} + \sqrt{3}) / (5 - 3) = 2(\sqrt{5} + \sqrt{3}) / 2 = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
$A \pm \sqrt{B}$	$A \mp \sqrt{B}$	$C / (A \pm \sqrt{B}) = C(A \mp \sqrt{B}) / (A^2 - B)$	$4 / (3 + \sqrt{5}) = 4(3 - \sqrt{5}) / (3^2 - 5) = 4(3 - \sqrt{5}) / (9 - 5) = 4(3 - \sqrt{5}) / 4 = 3 - \sqrt{5}$

IV. Rút gọn biểu thức chứa căn

Đây là dạng bài tập tổng hợp, yêu cầu vận dụng linh hoạt tất cả các phép biến đổi đã học.

1. Cộng, trừ các căn thức đồng dạng

Các căn thức đồng dạng là các căn thức có cùng phần căn (biểu thức dưới dấu căn giống nhau). Ta cộng/trừ các hệ số và giữ nguyên phần căn.

• **Ví dụ:** Rút gọn $A = 3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{18}$.

◦ Phân tích: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

◦ $A = 3 \cdot (2\sqrt{2}) - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (6 - 5 + 3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

2. Rút gọn biểu thức dạng phân thức

Đây là dạng bài phổ biến trong các kỳ thi. Các bước thực hiện thường là: tìm điều kiện xác định, quy đồng mẫu số, rút gọn tử số, và cuối cùng là rút gọn phân thức.

• **Ví dụ:** Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \right) \cdot \frac{(x - 4)}{\sqrt{4x}}$ (với $x > 0, x \neq 4$).

1. Bước 1: Quy đồng trong ngoặc đơn.

Mẫu chung là $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = x - 4$.

$\frac{(\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) + \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2))}{(x - 4)} = \frac{(x + 2\sqrt{x} + x - 2\sqrt{x})}{(x - 4)} = \frac{2x}{(x - 4)}$.

2. Bước 2: Rút gọn biểu thức còn lại.

$\sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$.

3. Bước 3: Thực hiện phép nhân.

$P = \left(\frac{2x}{(x - 4)} \right) \cdot \left(\frac{(x - 4)}{2\sqrt{x}} \right)$.

4. Bước 4: Rút gọn cuối cùng.

$P = \frac{(2x)}{(2\sqrt{x})} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

V. Ứng dụng trong Vật Lý và Hóa học

Các phép biến đổi căn thức là công cụ không thể thiếu khi làm việc với các công thức trong khoa học tự nhiên.

1. Trong Vật Lý

- **Công thức chu kỳ con lắc đơn:** $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Nếu biết T , g và cần tìm chiều dài l , ta phải biến đổi: $T^2 = (2\pi)^2 * (l/g) \Rightarrow l = g * (T / 2\pi)^2$.
- **Công thức vận tốc trong chuyển động thẳng biến đổi đều:** $v^2 - v_0^2 = 2as$. Để tìm vận tốc cuối v , ta có: $v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow v = \sqrt{(v_0^2 + 2as)}$.

2. Trong Hóa học

- **Mối liên hệ giữa pH và nồng độ H^+ :** $pH = -\log[H^+]$ hay $[H^+] = 10^{-pH}$.
- **Hằng số cân bằng K_c :** Xét phản ứng $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$. Ta có $K_c = [NH_3]^2 / ([N_2][H_2]^3)$. Để tính nồng độ $[NH_3]$ khi biết các giá trị khác, ta phải khai căn: $[NH_3] = \sqrt{(K_c * [N_2] * [H_2]^3)}$. Việc tính toán và biến đổi các biểu thức này đòi hỏi kỹ năng xử lý căn thức và lũy thừa thành thạo.