

1. Giới thiệu hàm số bậc bốn trùng phương

Hàm số bậc bốn trùng phương là hàm số có dạng:

$$y = ax^4 + bx^2 + c \text{ (với } a \neq 0\text{)}$$

Đặc điểm nhận dạng:

- Đây là một hàm đa thức bậc bốn nhưng chỉ chứa các lũy thừa bậc chẵn của biến x (x^4 , x^2 , x^0).
- **Tính chất đặc biệt:** Đây là một hàm số chẵn vì $f(-x) = a(-x)^4 + b(-x)^2 + c = ax^4 + bx^2 + c = f(x)$. Do đó, đồ thị của hàm số này luôn đối xứng qua trục tung (trục Oy).

2. Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương, chúng ta thực hiện theo các bước chuẩn sau:

1. Tìm tập xác định:

Hàm đa thức luôn có tập xác định là $D = \mathbf{R}$.

2. Khảo sát sự biến thiên:

◦ Tính đạo hàm:

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

◦ Tìm các điểm tới hạn: Giải phương trình $y' = 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow [x = 0 \text{ hoặc } 2ax^2 + b = 0]$$

- **Lập bảng biến thiên:** Xét dấu của y' dựa vào các nghiệm vừa tìm được. Từ đó suy ra các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.
- **Tìm giới hạn:** Tính các giới hạn của hàm số khi x tiến tới $+\infty$ và $-\infty$ để xác định dáng điệu của đồ thị ở hai đầu.
 - Nếu $a > 0$ thì $\lim_{(x \rightarrow \pm\infty)} y = +\infty$.
 - Nếu $a < 0$ thì $\lim_{(x \rightarrow \pm\infty)} y = -\infty$.

3. Vẽ đồ thị:

- Dựa vào bảng biến thiên và các điểm cực trị để phác họa dáng điệu của đồ thị.
- Tìm thêm một vài điểm đặc biệt khác (nếu cần) như giao điểm với trục tung Oy (cho $x=0 \Rightarrow y=c$, điểm $(0, c)$) và giao điểm với trục hoành Ox (giải phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$).
- Lưu ý tính đối xứng qua trục Oy khi vẽ để đồ thị được chính xác.

3. Phân tích chi tiết các dạng đồ thị

Số điểm cực trị của hàm số phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức là phụ thuộc vào dấu của a và b .

3.1. Trường hợp 1: Hàm số có một điểm cực trị (khi $ab \geq 0$)

Khi $ab \geq 0$, phương trình $y' = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = 0$. Do đó, hàm số có đúng một điểm cực trị.

a) Khi $a > 0$ và $b \geq 0$:

Hàm số có một điểm cực tiểu tại $x = 0$. Đồ thị có dạng một đường cong Parabol hướng bề lõm lên trên.

Ví dụ 1: Khảo sát hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.

- **Sự biến thiên:**

- $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$.

- $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x).

- Bảng biến thiên:

(Học sinh tự vẽ bảng: $y' = 0$ khi $x = 0$, $y' > 0$ khi $x < 0$ và $x > 0$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$ và đồng biến trên $(0, +\infty)$).

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -3$.

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$.

- **Đồ thị:** Đồ thị đối xứng qua trục Oy, đi qua điểm cực tiểu $(0, -3)$ và có hai nhánh hướng lên trên.

b) Khi $a = 0$ và $b \leq 0$:

Hàm số có một điểm cực đại tại $x = 0$. Đồ thị có dạng một đường cong Parabol úp xuống.

Ví dụ 2: Khảo sát hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.

- **Sự biến thiên:**

- $y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1)$.

- $y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- **Bảng biến thiên:**

(Học sinh tự vẽ bảng: $y' > 0$ khi $x < 0$, $y' < 0$ khi $x > 0$. Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$ và nghịch biến trên $(0, +\infty)$).

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 1$.

- Giới hạn: $\lim_{(x \rightarrow \pm\infty)} y = -\infty$.

- **Đồ thị:** Đồ thị đối xứng qua trục Oy, đi qua điểm cực đại $(0, 1)$ và có hai nhánh hướng xuống dưới.

3.2. Trường hợp 2: Hàm số có ba điểm cực trị (khi $ab < 0$)

Khi **$ab < 0$** , phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0$, $x = \sqrt{-b/2a}$ và $x = -\sqrt{-b/2a}$. Do đó, hàm số có ba điểm cực trị.

a) Khi $a > 0$ và $b < 0$:

Hàm số có một điểm cực đại tại $x = 0$ và hai điểm cực tiểu. Đồ thị có dạng hình chữ "W".

Ví dụ 3: Khảo sát hàm số $y = (1/4)x^4 - 2x^2 + 1$.

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.

- **Sự biến thiên:**

- $y' = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$.

- $y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2, x = -2.$

- Bảng biến thiên:

(Học sinh tự vẽ bảng, xét dấu y' trên các khoảng $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, +\infty)$).

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 1.$

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 2, y_{CT} = -3.$

- Giới hạn: $\lim_{(x \rightarrow \pm \infty)} y = +\infty.$

- **Đồ thị:** Đồ thị đối xứng qua trục Oy, đi qua điểm cực đại $(0, 1)$ và hai điểm cực tiểu $(-2, -3), (2, -3)$. Đồ thị có dạng chữ "W".

b) Khi $a = 0$ và $b > 0$:

Hàm số có một điểm cực tiểu tại $x = 0$ và hai điểm cực đại. Đồ thị có dạng hình chữ "M".

Ví dụ 4: Khảo sát hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 1.$

- **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}.$

- **Sự biến thiên:**

- $y' = -4x^3 + 16x = -4x(x^2 - 4).$

- $y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2, x = -2.$

- Bảng biến thiên:

(Học sinh tự vẽ bảng, xét dấu y' trên các khoảng).

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -1.$

◦ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 2$, $y_{CD} = 15$.

◦ Giới hạn: $\lim_{(x \rightarrow \pm \infty)} y = -\infty$.

- **Đồ thị:** Đồ thị đối xứng qua trục Oy, đi qua điểm cực tiểu (0, -1) và hai điểm cực đại (-2, 15), (2, 15). Đồ thị có dạng chữ "M".

4. Bảng tổng kết các dạng đồ thị

Bảng dưới đây tóm tắt mối quan hệ giữa các hệ số a, b và hình dạng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Điều kiện của a, b	Số điểm cực trị	Dạng đồ thị
$a > 0, b \geq 0$	1 điểm cực tiểu	Dạng Parabol, bề lõm hướng lên
$a < 0, b \leq 0$	1 điểm cực đại	Dạng Parabol, bề lõm hướng xuống
$a > 0, b < 0$	1 cực đại, 2 cực tiểu	Dạng chữ "W"
$a < 0, b > 0$	2 cực đại, 1 cực tiểu	Dạng chữ "M"

5. Một số bài toán liên quan

Dựa vào việc khảo sát hàm số, ta có thể giải quyết nhiều bài toán nâng cao hơn.

a) Biện luận số nghiệm của phương trình

Phương trình $f(x) = k$ có số nghiệm bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = k$ (đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox).

Ví dụ: Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- **Phân tích:** Ta biến đổi phương trình thành $x^4 - 2x^2 + 1 = m$.
- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và đường thẳng $y = m$.
- Khảo sát hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (tương tự ví dụ trong phần 3.2.a nhưng hệ số khác), ta thấy hàm số có một điểm cực đại tại $(0, 1)$ và hai điểm cực tiểu tại $(\pm 1, 0)$.
- Dựa vào đồ thị, để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt thì giá trị của m phải nằm giữa giá trị cực tiểu và giá trị cực đại.
- **Kết luận:** $0 < m < 1$.

b) Điều kiện để các điểm cực trị tạo thành một tam giác đặc biệt

Khi hàm số có 3 điểm cực trị ($a > 0$), các điểm cực trị là $A(0, c)$, $B(\sqrt{-b/2a}, c - b^2/4a)$, và $C(-\sqrt{-b/2a}, c - b^2/4a)$.

Ví dụ: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- **Điều kiện có 3 cực trị:** $a = 1 > 0$, $b = -2(m+1)$. Cần $ab < 0 \Leftrightarrow -2(m+1) < 0 \Leftrightarrow m > -1$.
- Ba điểm cực trị là $A(0, m)$, $B(\sqrt{m+1}, -m^2-m-1)$, $C(-\sqrt{m+1}, -m^2-m-1)$.

- Do tam giác ABC luôn cân tại A, để ABC vuông cân thì nó phải vuông tại A.
- Điều này xảy ra khi **vector AB . vector AC = 0**.
- Ta có: vector AB = $(\sqrt{m+1}, -m^2-2m-1)$ và vector AC = $(-\sqrt{m+1}, -m^2-2m-1)$.
- $AB.AC = -(m+1) + (-m^2-2m-1)^2 = -(m+1) + (-(m+1)^2)^2 = -(m+1) + (m+1)^4 = 0$.
- $(m+1)[(m+1)^3 - 1] = 0$.
- Vì $m > -1$ nên $m+1 > 0$. Do đó, $(m+1)^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^3 = 1 \Leftrightarrow m+1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.
- **Kết luận:** $m = 0$ là giá trị cần tìm.