

Phân Thức Đại Số và Ứng Dụng Trong Công Thức Tính Vận Tốc Trung Bình

Phân thức đại số không chỉ là một khái niệm toán học trừu tượng mà còn có nhiều ứng dụng quan trọng trong thực tế, đặc biệt là trong vật lý. Tài liệu này sẽ giúp các em học sinh lớp 8 hệ thống lại kiến thức về phân thức và khám phá cách chúng được sử dụng để giải quyết các bài toán về vận tốc trung bình một cách hiệu quả.

Phần 1: Tổng quan về phân thức đại số

1. Định nghĩa phân thức đại số

Định nghĩa: Một phân thức đại số (hay gọi tắt là phân thức) là một biểu thức có dạng A/B , trong đó A, B là những đa thức và B là đa thức khác 0.

- A được gọi là tử thức (hay tử).
- B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

Ví dụ minh họa:

- Phân thức $(3x + 1) / (x - 5)$ có tử thức là $3x + 1$ và mẫu thức là $x - 5$.
- Phân thức $(x^2y) / (x + y)$ có tử thức là x^2y và mẫu thức là $x + y$.
- Mỗi đa thức cũng được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1. Ví dụ: $x^2 - 4$ là phân thức $(x^2 - 4) / 1$.

2. Điều kiện xác định của phân thức

Một phân thức chỉ có giá trị khi mẫu thức của nó khác 0. Điều kiện để phân thức A/B xác định là $B \neq 0$.

Quy tắc: Để tìm điều kiện xác định của một phân thức, ta cho mẫu thức khác 0 và giải tìm giá trị của biến.

Ví dụ minh họa:

1. Tìm điều kiện xác định của phân thức $P = \frac{5}{(x - 7)}$.

Giải: Phân thức P xác định khi mẫu thức $x - 7 \neq 0$. Vậy $x \neq 7$.

2. Tìm điều kiện xác định của phân thức $Q = \frac{(x + 1)}{(x^2 - 1)}$.

Giải: Phân thức Q xác định khi $x^2 - 1 \neq 0$. Ta có $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Do đó, $(x - 1)(x + 1) \neq 0$, suy ra $x - 1 \neq 0$ và $x + 1 \neq 0$. Vậy $x \neq 1$ và $x \neq -1$.

3. Tính chất cơ bản của phân thức đại số

a. Tính chất nhân

Công thức: Nếu M là một đa thức khác 0, ta có: $\frac{A}{B} = \frac{(A.M)}{(B.M)}$

Giải thích: Ta có thể nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 để được một phân thức mới bằng phân thức đã cho. Tính chất này thường dùng để quy đồng mẫu thức.

Ví dụ: Quy đồng mẫu thức cho phân thức $\frac{3}{(x - 2)}$ với mẫu thức mới là $x^2 - 4$.

Ta thấy $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Vậy ta cần nhân cả tử và mẫu của phân thức ban đầu với $(x + 2)$.

$$3 / (x - 2) = [3 * (x + 2)] / [(x - 2) * (x + 2)] = (3x + 6) / (x^2 - 4).$$

b. Tính chất chia (Rút gọn phân thức)

Công thức: Nếu N là một nhân tử chung của A và B, ta có: **$A/B = (A:N) / (B:N)$**

Giải thích: Ta có thể chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng để được một phân thức mới (rút gọn hơn) bằng phân thức đã cho.

Ví dụ: Rút gọn phân thức $P = (5x + 10) / (x^2 - 4)$.

Giải:

Phân tích tử và mẫu thành nhân tử:

Tử thức: $5x + 10 = 5(x + 2)$.

Mẫu thức: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Nhân tử chung là $(x + 2)$.

Vậy $P = [5(x + 2)] / [(x - 2)(x + 2)] = 5 / (x - 2)$.

c. Quy tắc đổi dấu

Công thức: **$A/B = (-A)/(-B)$ và $A/B = -(-A)/B = -A/(-B)$**

Giải thích: Khi đổi dấu cả tử và mẫu, giá trị phân thức không đổi. Khi đổi dấu của tử hoặc mẫu thì phải đổi dấu của cả phân thức.

Ví dụ: $(x - 1) / (2 - y) = -(x - 1) / -(2 - y) = -(x - 1) / (y - 2)$.

Phần 2: Các phép toán với phân thức đại số

4. Phép cộng và trừ phân thức

a. Cộng, trừ hai phân thức cùng mẫu

Công thức: $A/M + B/M = (A + B)/M$ và $A/M - B/M = (A - B)/M$

Giải thích: Để cộng (hoặc trừ) các phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng (hoặc trừ) các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

Ví dụ: Tính $(2x - 1) / (x + 3) + (x + 10) / (x + 3)$.

Giải: $(2x - 1 + x + 10) / (x + 3) = (3x + 9) / (x + 3) = [3(x + 3)] / (x + 3) = 3$.

b. Cộng, trừ hai phân thức khác mẫu

Quy tắc:

1. Phân tích các mẫu thức thành nhân tử để tìm mẫu thức chung (MTC).
2. Tìm nhân tử phụ cho mỗi phân thức (bằng cách lấy MTC chia cho mẫu thức riêng).
3. Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.
4. Thực hiện cộng/trừ các phân thức cùng mẫu vừa thu được.

Ví dụ: Tính $1 / (x - 1) - 2 / (x^2 - 1)$.

Giải:

Mẫu thức chung: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Nhân tử phụ của phân thức thứ nhất là $(x + 1)$.

Phép tính trở thành: $(1 * (x + 1)) / ((x - 1)(x + 1)) - 2 / ((x - 1)(x + 1))$

$$= (x + 1 - 2) / (x^2 - 1) = (x - 1) / ((x - 1)(x + 1)) = 1 / (x + 1).$$

5. Phép nhân phân thức

Công thức: $(A/B) * (C/D) = (A.C) / (B.D)$

Giải thích: Để nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau và các mẫu thức với nhau, sau đó rút gọn kết quả (nếu có thể).

Ví dụ: Tính $(x^2 - 4) / (3x) * (6x^2) / (x + 2)$.

Giải:

$$= [(x^2 - 4) * (6x^2)] / [3x * (x + 2)]$$

Phân tích để rút gọn: $= [(x - 2)(x + 2) * 6x^2] / [3x * (x + 2)]$

Rút gọn $(x + 2)$ và $3x$: $= (x - 2) * 2x = 2x^2 - 4x$.

6. Phép chia phân thức

Công thức: $(A/B) : (C/D) = (A/B) * (D/C) = (A.D) / (B.C)$ (với $C/D \neq 0$)

Giải thích: Để chia phân thức A/B cho phân thức C/D (khác 0), ta nhân A/B với phân thức nghịch đảo của C/D là D/C .

Ví dụ: Tính $(x + 1) / (y^2) : (x^2 - 1) / (y^3)$.

Giải:

$$= (x + 1) / (y^2) * (y^3) / (x^2 - 1)$$

$$= [(x + 1) * y^3] / [y^2 * (x - 1)(x + 1)]$$

Rút gọn $(x + 1)$ và y^2 : $= y / (x - 1)$.

Phần 3: Ứng dụng vào bài toán vận tốc trung bình

7. Nhắc lại các công thức vật lý cơ bản

Trong chuyển động thẳng đều, mối quan hệ giữa quãng đường (S), vận tốc (v) và thời gian (t) được thể hiện qua các công thức:

- $v = S / t$ (Vận tốc = Quãng đường / Thời gian)
- $S = v * t$ (Quãng đường = Vận tốc * Thời gian)
- $t = S / v$ (Thời gian = Quãng đường / Vận tốc)

8. Công thức tính vận tốc trung bình

Khi một vật chuyển động trên một quãng đường không đều (tức là có vận tốc thay đổi trên các đoạn đường khác nhau), ta không thể đơn giản lấy trung bình cộng các vận tốc.

Công thức đúng: Vận tốc trung bình trên cả quãng đường được tính bằng tổng quãng đường đi được chia cho tổng thời gian để đi hết quãng đường đó.

$$V_{tb} = (\text{Tổng quãng đường}) / (\text{Tổng thời gian}) = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) / (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$$

Đây chính là lúc phân thức đại số phát huy tác dụng. Thông thường, bài toán sẽ cho biết vận tốc và quãng đường (hoặc thời gian) trên từng chặng. Ta sẽ phải sử dụng công thức $t = S/v$ để biểu diễn thời gian qua quãng đường và vận tốc, dẫn đến một biểu thức dạng phân thức.

Công thức biến đổi thường gặp:

$$V_{tb} = (S_1 + S_2) / (S_1/v_1 + S_2/v_2)$$

9. Các dạng bài toán ví dụ

Ví dụ 1: Chuyển động trên hai nửa quãng đường bằng nhau

Bài toán: Một ô tô đi từ A đến B. Nửa đầu quãng đường ô tô đi với vận tốc v_1 , nửa sau quãng đường đi với vận tốc v_2 . Tính vận tốc trung bình của ô tô trên cả quãng đường AB.

Phân tích và giải:

- Gọi S là tổng chiều dài quãng đường AB.
- Nửa quãng đường đầu: $S_1 = S/2$.
- Nửa quãng đường sau: $S_2 = S/2$.
- Thời gian đi nửa quãng đường đầu: $t_1 = S_1 / v_1 = (S/2) / v_1 = S / (2v_1)$.
- Thời gian đi nửa quãng đường sau: $t_2 = S_2 / v_2 = (S/2) / v_2 = S / (2v_2)$.
- Tổng thời gian đi hết quãng đường AB: $t = t_1 + t_2 = S/(2v_1) + S/(2v_2)$.

Đây là phép cộng hai phân thức. Ta quy đồng mẫu thức:

$$t = [S \cdot v_2 / (2v_1v_2)] + [S \cdot v_1 / (2v_1v_2)] = (S \cdot v_2 + S \cdot v_1) / (2v_1v_2) = S(v_1 + v_2) / (2v_1v_2).$$

- Áp dụng công thức vận tốc trung bình:

$$V_{tb} = (\text{Tổng quãng đường}) / (\text{Tổng thời gian}) = S / t = S / [S(v_1 + v_2) / (2v_1v_2)].$$

Đây là phép chia, ta nhân với nghịch đảo:

$$V_{tb} = S * [(2v_1v_2) / S(v_1 + v_2)] = \mathbf{(2v_1v_2) / (v_1 + v_2)}.$$

Kết luận: Công thức tính vận tốc trung bình trong trường hợp này là một phân thức đại số với biến là v_1 và v_2 .

Ví dụ 2: Áp dụng công thức với số liệu cụ thể

Bài toán: Một người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B. Nửa quãng đường đầu người đó đi với vận tốc 50 km/h. Nửa quãng đường còn lại, do đường xấu hơn, người đó đi với vận tốc 30 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AB.

Phân tích và giải:

Đây chính là trường hợp của Ví dụ 1. Ta có thể áp dụng trực tiếp công thức vừa tìm được:

- $v_1 = 50 \text{ km/h}$
- $v_2 = 30 \text{ km/h}$
- Vận tốc trung bình: $V_{tb} = (2 * v_1 * v_2) / (v_1 + v_2) = (2 * 50 * 30) / (50 + 30)$.
- $V_{tb} = 3000 / 80 = 300 / 8 = 75 / 2 = 37.5 \text{ km/h}$.

Lưu ý: Nếu tính trung bình cộng $(50 + 30)/2 = 40 \text{ km/h}$ là một kết quả sai. Điều này cho thấy tầm quan trọng của việc sử dụng đúng công thức dựa trên phân thức.

Ví dụ 3: Chuyển động trong hai nửa thời gian bằng nhau

Bài toán: Một chiếc thuyền đi trong một khoảng thời gian T. Trong nửa khoảng thời gian đầu ($T/2$), thuyền đi với vận tốc v_1 . Trong nửa khoảng thời gian sau ($T/2$), thuyền đi với vận tốc v_2 . Tính vận tốc trung bình của thuyền.

Phân tích và giải:

- Tổng thời gian di chuyển là T.

- Thời gian đi chặng đầu: $t_1 = T/2$.
- Thời gian đi chặng sau: $t_2 = T/2$.
- Quãng đường đi trong chặng đầu: $S_1 = v_1 * t_1 = v_1 * (T/2)$.
- Quãng đường đi trong chặng sau: $S_2 = v_2 * t_2 = v_2 * (T/2)$.
- Tổng quãng đường đi được: $S = S_1 + S_2 = v_1*(T/2) + v_2*(T/2) = (T/2) * (v_1 + v_2)$.
- Áp dụng công thức vận tốc trung bình:

$$V_{tb} = (\text{Tổng quãng đường}) / (\text{Tổng thời gian}) = S / T = [(T/2) * (v_1 + v_2)] / T$$
- Rút gọn T, ta được: $V_{tb} = (v_1 + v_2) / 2$.

So sánh:

Dùng bảng để thấy rõ sự khác biệt giữa hai dạng bài toán:

Tiêu chí	Dạng 1: Chia đôi quãng đường	Dạng 2: Chia đôi thời gian
Điều kiện	$S_1 = S_2 = S/2$	$t_1 = t_2 = T/2$
Công thức V_{tb}	$(2v_1v_2) / (v_1 + v_2)$	$(v_1 + v_2) / 2$

Qua các ví dụ trên, chúng ta thấy rằng việc nắm vững các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và rút gọn phân thức đại số là vô cùng cần thiết để giải quyết các bài toán vật lý thực tế một cách chính xác. Nó giúp chúng ta xây dựng được các công thức tổng quát và áp dụng linh hoạt vào các tình huống cụ thể.