

Ứng dụng Phương trình bậc hai: Tìm quỹ đạo của quả bóng

Khi một cầu thủ đá một quả bóng, bạn có thấy quỹ đạo của nó là một đường cong rất đẹp không? Đường cong đó không phải ngẫu nhiên mà tuân theo một quy luật toán học chặt chẽ. Đó chính là đồ thị của một hàm số bậc hai, hay còn gọi là đường Parabol. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ cùng nhau khám phá cách dùng Toán học để mô tả và giải quyết các bài toán thực tế liên quan đến quỹ đạo của quả bóng.

1. Kiến thức nền tảng: Hàm số bậc hai và Đồ thị Parabol

Trước khi đi vào bài toán quả bóng, chúng ta cần ôn lại kiến thức cốt lõi về hàm số bậc hai.

1.1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số có dạng:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (với } a \neq 0 \text{)}$$

- **a, b, c** là các hằng số cho trước.
- Đồ thị của hàm số này là một đường cong Parabol.
- Hệ số **a** quyết định hình dạng và hướng của Parabol:

- Nếu $a > 0$, Parabol có bề lõm quay lên trên. Đồ thị có một điểm thấp nhất (giá trị nhỏ nhất).
- Nếu $a < 0$, Parabol có bề lõm quay xuống dưới. Đồ thị có một điểm cao nhất (giá trị lớn nhất). Trong bài toán quỹ đạo quả bóng, ta luôn có $a < 0$ vì quả bóng bay lên rồi sẽ rơi xuống do trọng lực.

1.2. Đỉnh của Parabol

Đỉnh Parabol là điểm cao nhất hoặc thấp nhất của đồ thị. Đây là khái niệm quan trọng nhất để giải các bài toán tìm độ cao cực đại.

Tọa độ đỉnh I của Parabol $y = ax^2 + bx + c$ được xác định bởi công thức:

$I(x_0, y_0)$ với $x_0 = -b / 2a$ và $y_0 = -\Delta / 4a = f(x_0)$

Trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ví dụ minh họa:

Xác định tọa độ đỉnh của Parabol (P): $y = -2x^2 + 8x - 5$

Giải:

Ta có: $a = -2, b = 8, c = -5$.

1. Tính hoành độ đỉnh: $x_0 = -b / 2a = -8 / (2 * -2) = -8 / -4 = 2$.

2. Tính tung độ đỉnh: $y_0 = f(2) = -2(2)^2 + 8(2) - 5 = -2(4) + 16 - 5 = -8 + 16 - 5 = 3$.

Vậy tọa độ đỉnh của Parabol là $I(2, 3)$. Vì $a = -2 < 0$, đây là điểm cao nhất của đồ thị.

2. Mô hình hóa quỹ đạo quả bóng

Để áp dụng toán học, chúng ta cần đặt chuyển động của quả bóng vào một hệ trục tọa độ Oxy:

- **Trục Ox (trục hoành):** Biểu diễn mặt đất, thể hiện tầm bay xa của quả bóng.
- **Trục Oy (trục tung):** Biểu diễn độ cao của quả bóng.
- Gốc tọa độ $O(0,0)$ thường là vị trí đá bóng.

Khi đó, quỹ đạo của quả bóng được mô tả bởi một phương trình bậc hai có dạng:

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

Trong đó:

- **x** là khoảng cách theo phương ngang (tầm xa) tính từ vị trí đá.
- **$h(x)$** là độ cao của quả bóng tại vị trí x .
- **$a < 0$** (do ảnh hưởng của trọng lực).
- **c** là độ cao ban đầu của quả bóng. Nếu đá từ mặt đất thì $c = 0$.

3. Các dạng bài toán thực tế

3.1. Bài toán 1: Tìm độ cao cực đại của quả bóng

Ý nghĩa: Độ cao lớn nhất mà quả bóng đạt được trong quá trình bay.

Phương pháp giải: Độ cao cực đại chính là tung độ đỉnh (y_0) của Parabol. Vị trí theo phương ngang mà bóng đạt độ cao cực đại là hoành độ đỉnh (x_0).

- Vị trí đạt độ cao cực đại: $x = -b / 2a$
- Độ cao cực đại: $h_{\text{max}} = h(-b / 2a)$

Ví dụ 1: Một quả bóng được đá lên từ mặt đất theo quỹ đạo là một Parabol có phương trình $h(x) = -0.5x^2 + 4x$, trong đó h là độ cao (mét) và x là tầm bay xa (mét). Hỏi bóng đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

Giải:

Phương trình quỹ đạo là $h(x) = -0.5x^2 + 4x$ ($a = -0.5$, $b = 4$, $c = 0$).

Bóng đạt độ cao tối đa tại đỉnh của Parabol.

1. Hoành độ đỉnh: $x = -b / 2a = -4 / (2 * -0.5) = -4 / -1 = 4$ mét.
2. Tung độ đỉnh (độ cao cực đại): $h_{\text{max}} = h(4) = -0.5(4)^2 + 4(4) = -0.5(16) + 16 = -8 + 16 = 8$ mét.

Kết luận: Quả bóng đạt độ cao tối đa là 8 mét khi nó cách vị trí đá 4 mét theo phương ngang.

Ví dụ 2: Một vận động viên ném một quả tạ. Quỹ đạo của quả tạ được cho bởi phương trình $y = -0.02x^2 + 0.8x + 1.8$, với y là độ cao (mét) và x là khoảng cách ném xa (mét). Tính độ cao cao nhất mà quả tạ đạt được.

Giải:

Ta có $a = -0.02$, $b = 0.8$, $c = 1.8$.

1. Vị trí quả tạ đạt độ cao cao nhất: $x = -b / 2a = -0.8 / (2 * -0.02) = -0.8 / -0.04 = 20$ mét.

2. Độ cao cao nhất: $y_{\max} = y(20) = -0.02(20)^2 + 0.8(20) + 1.8 = -0.02(400) + 16 + 1.8 = -8 + 16 + 1.8 = 9.8$ mét.

Kết luận: Độ cao cao nhất quả tạ đạt được là 9.8 mét.

3.2. Bài toán 2: Tìm tầm bay xa của quả bóng

Ý nghĩa: Khoảng cách từ vị trí đá đến vị trí bóng chạm đất.

Phương pháp giải: Tầm bay xa là khoảng cách x khi bóng chạm đất, tức là khi độ cao $h(x) = 0$. Ta cần giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ để tìm x . Thông thường phương trình sẽ có hai nghiệm, ta chọn nghiệm dương lớn hơn (nếu đá từ mặt đất, một nghiệm là 0).

Ví dụ 1: Sử dụng lại phương trình từ ví dụ 1 ở mục 3.1: $h(x) = -0.5x^2 + 4x$. Tính tầm bay xa của quả bóng.

Giải:

Bóng chạm đất khi $h(x) = 0$.

Ta giải phương trình: $-0.5x^2 + 4x = 0$

$$\Leftrightarrow x(-0.5x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } -0.5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 8.$$

Nghiệm $x = 0$ là vị trí bắt đầu đá. Nghiệm $x = 8$ là vị trí bóng chạm đất.

Kết luận: Tầm bay xa của quả bóng là 8 mét.

Ví dụ 2: Quỹ đạo một cú sút phạt là $y = -0.05x^2 + x + 0.2$, với y là độ cao và x là khoảng cách. Hỏi quả bóng bay xa được bao nhiêu mét trước khi chạm đất? (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

Giải:

Giải phương trình $y = 0 \Leftrightarrow -0.05x^2 + x + 0.2 = 0$.

Đây là phương trình bậc hai với $a = -0.05$, $b = 1$, $c = 0.2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-0.05)(0.2) = 1 + 0.04 = 1.04.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = (-1 + \sqrt{1.04}) / (2 * -0.05) = (-1 + 1.0198) / -0.1 \approx -0.198 \text{ (loại vì khoảng cách không âm)}.$$

$$x_2 = (-1 - \sqrt{1.04}) / (2 * -0.05) = (-1 - 1.0198) / -0.1 \approx 20.20 \text{ mét}.$$

Kết luận: Tầm bay xa của quả bóng là khoảng 20.20 mét.

3.3. Bài toán 3: Quả bóng có vượt qua chướng ngại vật không?

Ý nghĩa: Kiểm tra xem tại một vị trí có chướng ngại vật (ví dụ: hàng rào, khung thành), quả bóng có bay cao hơn chướng ngại vật đó không.

Phương pháp giải:

1. Xác định vị trí của chướng ngại vật (giá trị x_{cn}) và chiều cao của nó (h_{cn}).
2. Tính độ cao của quả bóng tại vị trí đó bằng cách thay x_{cn} vào phương trình quỹ đạo: $h_{bóng} = h(x_{cn})$.

3. So sánh $h_{\text{bóng}}$ với h_{cn} . Nếu $h_{\text{bóng}} > h_{\text{cn}}$, bóng vượt qua. Ngược lại thì không.

Ví dụ: Một cầu thủ sút phạt từ khoảng cách 20 mét so với khung thành. Khung thành cao 2.44 mét. Quỹ đạo của quả bóng được cho bởi phương trình $y = -0.01x^2 + 0.4x$ (x, y tính bằng mét). Hỏi quả bóng có đi vào lưới không, biết rằng cú sút đi đúng hướng? (Giả sử bóng không chạm đất trước khi đến khung thành).

Giải:

Chướng ngại vật ở đây là xà ngang của khung thành.

1. Vị trí khung thành: $x = 20$ mét.
2. Chiều cao xà ngang: $h_{\text{cn}} = 2.44$ mét.
3. Tính độ cao của quả bóng tại vị trí khung thành: $y(20) = -0.01(20)^2 + 0.4(20) = -0.01(400) + 8 = -4 + 8 = 4$ mét.
4. So sánh: Độ cao của bóng là 4 mét, cao hơn chiều cao xà ngang là 2.44 mét.

Kết luận: Quả bóng bay cao hơn xà ngang, do đó không đi vào lưới (bóng bay vọt xà).

4. Bảng tổng kết

Bảng dưới đây tóm tắt mối liên hệ giữa các yếu tố vật lý của quỹ đạo quả bóng và các khái niệm toán học của Parabol.

Yếu tố vật lý	Khái niệm Toán học	Phương pháp xác định
Độ cao ban đầu	Giao điểm với trục tung (Oy)	Tính $h(0)$, kết quả là hệ số c
Độ cao cực đại	Tung độ đỉnh của Parabol	Tính $y_0 = h(-b/2a)$
Vị trí đạt độ cao cực đại	Hoành độ đỉnh của Parabol	Tính $x_0 = -b/2a$
Tầm bay xa	Giao điểm với trục hoành (Ox)	Giải phương trình $h(x) = 0$ và lấy nghiệm $x > 0$

Kết luận

Như vậy, thông qua các công cụ của hàm số bậc hai, chúng ta có thể phân tích và dự đoán chính xác quỹ đạo của một vật thể bay như quả bóng. Việc hiểu rõ mối liên hệ giữa công thức toán học và hiện tượng thực tế không chỉ giúp các em giải quyết các bài toán trong sách vở mà còn mở ra một cách nhìn mới, thú vị hơn về thế giới xung quanh.