

Chuyên đề: Dãy tỉ số bằng nhau và ứng dụng chia thưởng theo đóng góp

Chào các em học sinh! Trong cuộc sống, chúng ta thường gặp các bài toán cần phân chia một thứ gì đó (tiền bạc, phần thưởng, công việc...) một cách công bằng dựa trên sự đóng góp hoặc năng lực của mỗi người. Toán học lớp 7 cung cấp một công cụ rất mạnh mẽ để giải quyết vấn đề này, đó chính là "Dãy tỉ số bằng nhau". Chuyên đề này sẽ giúp các em nắm vững kiến thức và vận dụng thành thạo để giải quyết các bài toán thực tế.

1. Kiến thức nền tảng: Tỉ lệ thức

Trước khi đi vào dãy tỉ số bằng nhau, chúng ta cần ôn lại kiến thức về tỉ lệ thức.

a. Định nghĩa

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số. Nếu hai tỉ số **a/b** và **c/d** bằng nhau, ta có một tỉ lệ thức.

Công thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (với $b, d \neq 0$)

Giải thích: Trong đó, a và d được gọi là các số hạng ngoài (ngoại tỉ), b và c được gọi là các số hạng trong (trung tỉ).

Ví dụ: Ta có $\frac{3}{4} = 0.75$ và $\frac{6}{8} = 0.75$. Vậy ta có tỉ lệ thức: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

b. Tính chất của tỉ lệ thức

Tính chất 1: Tính chất cơ bản (Tích chéo)

Từ một tỉ lệ thức, ta có thể suy ra đẳng thức về tích của các số hạng trong và ngoài.

Công thức: Nếu $a/b = c/d$ thì $a * d = b * c$

Giải thích: Tích của hai ngoại tỉ bằng tích của hai trung tỉ.

Ví dụ: Từ tỉ lệ thức $3/4 = 6/8$, ta suy ra $3 * 8 = 4 * 6$ (vì cùng bằng 24).

Tính chất 2: Tính chất hoán vị

Từ một tỉ lệ thức, ta có thể hoán vị các số hạng để tạo ra các tỉ lệ thức mới.

Công thức: Nếu có $a * d = b * c$ (với $a, b, c, d \neq 0$), ta có thể suy ra các tỉ lệ thức sau:

- $a/b = c/d$
- $a/c = b/d$ (Đổi chỗ trung tỉ)
- $d/b = c/a$ (Đổi chỗ ngoại tỉ)
- $d/c = b/a$ (Đổi chỗ cả trung tỉ và ngoại tỉ)

Ví dụ: Từ đẳng thức $2 * 15 = 5 * 6$, ta có thể lập các tỉ lệ thức:

- $2/5 = 6/15$
- $2/6 = 5/15$
- $15/5 = 6/2$
- $15/6 = 5/2$

2. Trọng tâm: Dãy tỉ số bằng nhau

a. Định nghĩa

Khi có từ ba tỉ số trở lên bằng nhau, ta gọi đó là một dãy tỉ số bằng nhau.

Ví dụ: $1/2 = 2/4 = 4/8$ là một dãy tỉ số bằng nhau.

b. Tính chất dãy tỉ số bằng nhau

Đây là tính chất quan trọng nhất để giải quyết các bài toán phân chia.

Công thức: Từ tỉ lệ thức $a/b = c/d$, ta suy ra:

$a/b = c/d = (a + c) / (b + d) = (a - c) / (b - d)$ (với điều kiện các mẫu số khác 0 và $b \neq \pm d$)

Giải thích: Giá trị của mỗi tỉ số trong dãy cũng bằng tỉ số của tổng (hoặc hiệu) các tử số cho tổng (hoặc hiệu) các mẫu số tương ứng.

Ví dụ minh họa tính chất:

Ví dụ 1: Tìm hai số x và y , biết rằng $x/3 = y/5$ và $x + y = 16$.

Giải:

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$x/3 = y/5 = (x + y) / (3 + 5) = 16 / 8 = 2.$$

Từ đó suy ra:

$$x/3 = 2 \Rightarrow x = 2 * 3 = 6.$$

$$y/5 = 2 \Rightarrow y = 2 * 5 = 10.$$

Vậy $x = 6$ và $y = 10$.

Ví dụ 2: Tìm hai số a và b , biết $a/7 = b/4$ và $a - b = 9$.

Giải:

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$a/7 = b/4 = (a - b) / (7 - 4) = 9 / 3 = 3.$$

Từ đó suy ra:

$$a/7 = 3 \Rightarrow a = 3 * 7 = 21.$$

$$b/4 = 3 \Rightarrow b = 3 * 4 = 12.$$

Vậy $a = 21$ và $b = 12$.

c. Tính chất mở rộng

Tính chất trên có thể mở rộng cho dãy có nhiều tỉ số.

Công thức: Từ dãy tỉ số $a/x = b/y = c/z$, ta suy ra:

$$a/x = b/y = c/z = (a + b + c) / (x + y + z) = (a - b + c) / (x - y + z) = \dots$$

Giải thích: Tính chất này đúng với mọi tổ hợp cộng, trừ các tử số và các mẫu số tương ứng.

Ví dụ minh họa tính chất mở rộng:

Ví dụ: Tìm x, y, z biết: $x/2 = y/3 = z/5$ và $x + y + z = 50$.

Giải:

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$x/2 = y/3 = z/5 = (x + y + z) / (2 + 3 + 5) = 50 / 10 = 5.$$

Từ đó suy ra:

$$x/2 = 5 \Rightarrow x = 5 * 2 = 10.$$

$$y/3 = 5 \Rightarrow y = 5 * 3 = 15.$$

$$z/5 = 5 \Rightarrow z = 5 * 5 = 25.$$

Vậy $x = 10$, $y = 15$, $z = 25$.

3. Phương pháp giải bài toán chia theo tỉ lệ đóng góp

Đây là ứng dụng thực tế quan trọng nhất của dãy tỉ số bằng nhau. Để giải các bài toán như chia tiền thưởng, chia lợi nhuận, chia nhuận bút... một cách công bằng, chúng ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1: Gọi ẩn và xác định đơn vị.** Gọi các số tiền/phần thưởng cần chia là các ẩn (ví dụ: x , y , z ...). Đơn vị thường là đồng, triệu đồng...
- Bước 2: Lập dãy tỉ số bằng nhau.** Dựa vào đề bài, xác định các đại lượng cần chia tỉ lệ thuận với những số nào. Ví dụ: "Số tiền thưởng tỉ lệ với số điểm đóng góp là 8, 9, 10" thì ta có dãy tỉ số $x/8 = y/9 = z/10$.
- Bước 3: Tìm mối liên hệ giữa các ẩn.** Đề bài thường cho biết tổng, hiệu hoặc một mối quan hệ khác giữa các ẩn. Ví dụ: "Tổng số tiền thưởng là 54 triệu đồng" thì ta có $x + y + z = 54.000.000$.
- Bước 4: Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.** Sử dụng dãy tỉ số đã lập ở Bước 2 và mối liên hệ ở Bước 3 để tìm ra giá trị của các ẩn.
- Bước 5: Kiểm tra và kết luận.** Sau khi tìm được giá trị các ẩn, hãy kiểm tra lại xem có thỏa mãn điều kiện đề bài không (ví dụ: cộng lại có ra đúng tổng không?) và đưa ra kết luận cuối cùng.

4. Ví dụ vận dụng chi tiết

Ví dụ 1: Chia tiền thưởng cuối năm

Đề bài: Ba nhân viên trong một tổ sản xuất có thành tích đóng góp trong năm được đánh giá theo các mức điểm 7, 8, và 10. Tổng số tiền thưởng cho cả tổ là 75 triệu đồng. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu tiền thưởng, biết rằng tiền thưởng được chia tỉ lệ thuận với điểm thành tích?

Bài giải:

- **Bước 1:** Gọi số tiền thưởng của ba nhân viên lần lượt là x, y, z (đơn vị: triệu đồng). Điều kiện: $x, y, z > 0$.

- **Bước 2:** Vì số tiền thưởng tỉ lệ thuận với điểm thành tích 7, 8, 10 nên ta có dãy tỉ số bằng nhau:

$$x/7 = y/8 = z/10$$

- **Bước 3:** Tổng số tiền thưởng là 75 triệu đồng, nên ta có:

$$x + y + z = 75$$

- **Bước 4:** Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$x/7 = y/8 = z/10 = (x + y + z) / (7 + 8 + 10) = 75 / 25 = 3.$$

Từ đó, ta tìm được:

- $x/7 = 3 \Rightarrow x = 3 * 7 = 21$ (triệu đồng)

- $y/8 = 3 \Rightarrow y = 3 * 8 = 24$ (triệu đồng)

- $z/10 = 3 \Rightarrow z = 3 * 10 = 30$ (triệu đồng)

- **Bước 5:** Kiểm tra lại: $21 + 24 + 30 = 75$ (đúng). Các giá trị đều dương.

Kết luận: Số tiền thưởng của ba nhân viên lần lượt là 21 triệu đồng, 24 triệu đồng và 30 triệu đồng.

Ví dụ 2: Chia nhuận bút cho nhóm tác giả

Đề bài: Ba bạn An, Bình, Chi cùng nhau viết một cuốn sách tham khảo. Số trang sách mỗi bạn viết được lần lượt là 80 trang, 100 trang và 120 trang. Sau khi xuất bản, tổng số tiền nhuận bút nhận được là 90 triệu đồng. Hãy chia số tiền nhuận bút này một cách công bằng cho ba bạn.

Bài giải:

- **Bước 1:** Gọi số tiền nhuận bút của An, Bình, Chi lần lượt là a, b, c (đơn vị: triệu đồng). Điều kiện: $a, b, c > 0$.
- **Bước 2:** Vì số tiền nhuận bút được chia công bằng (tỉ lệ thuận) với số trang đã viết, ta có:

$$a/80 = b/100 = c/120$$

Để tính toán đơn giản hơn, ta có thể rút gọn các mẫu số bằng cách chia tất cả cho ước chung lớn nhất của chúng là 20: $a/4 = b/5 = c/6$.

- **Bước 3:** Tổng số tiền nhuận bút là 90 triệu đồng, nên ta có:

$$a + b + c = 90$$

- **Bước 4:** Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau với dãy đã rút gọn:

$$a/4 = b/5 = c/6 = (a + b + c) / (4 + 5 + 6) = 90 / 15 = 6.$$

Từ đó, ta tìm được:

- $a/4 = 6 \Rightarrow a = 6 * 4 = 24$ (triệu đồng)

◦ $b/5 = 6 \Rightarrow b = 6 * 5 = 30$ (triệu đồng)

◦ $c/6 = 6 \Rightarrow c = 6 * 6 = 36$ (triệu đồng)

- **Bước 5:** Kiểm tra lại: $24 + 30 + 36 = 90$ (đúng).

Kết luận: Số tiền nhuận bút của An, Bình, Chi nhận được lần lượt là 24 triệu đồng, 30 triệu đồng và 36 triệu đồng.

Ví dụ 3: Bài toán ngược

Đề bài: Ba lớp 7A, 7B, 7C tham gia trồng cây. Số cây mỗi lớp trồng được tỉ lệ với số học sinh của lớp đó là 35, 40, 42. Biết rằng lớp 7B trồng nhiều hơn lớp 7A là 10 cây. Hỏi mỗi lớp trồng được bao nhiêu cây?

Bài giải:

- **Bước 1:** Gọi số cây trồng được của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (đơn vị: cây). Điều kiện: x, y, z là số nguyên dương.

- **Bước 2:** Theo đề bài, số cây tỉ lệ với số học sinh, ta có dãy tỉ số:

$$x/35 = y/40 = z/42$$

- **Bước 3:** Lớp 7B trồng nhiều hơn lớp 7A là 10 cây, nghĩa là:

$$y - x = 10$$

- **Bước 4:** Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau (sử dụng hiệu):

$$x/35 = y/40 = z/42 = (y - x) / (40 - 35) = 10 / 5 = 2.$$

Từ đó, ta tìm được:

◦ $x/35 = 2 \Rightarrow x = 2 * 35 = 70$ (cây)

◦ $y/40 = 2 \Rightarrow y = 2 * 40 = 80$ (cây)

◦ $z/42 = 2 \Rightarrow z = 2 * 42 = 84$ (cây)

- **Bước 5:** Kiểm tra lại: $y - x = 80 - 70 = 10$ (đúng).

Kết luận: Số cây của ba lớp 7A, 7B, 7C trồng được lần lượt là 70 cây, 80 cây và 84 cây.

VIDOCU.COM