

Tổng hợp kiến thức Đạo hàm Lượng giác và Đạo hàm cấp hai

Tài liệu này cung cấp một cái nhìn tổng quan và chi tiết về hai chủ đề quan trọng trong chương trình Toán lớp 11: Đạo hàm của các hàm số lượng giác và khái niệm về đạo hàm cấp hai. Nắm vững các công thức và phương pháp trong chuyên đề này là nền tảng để giải quyết các bài toán phức tạp hơn về khảo sát hàm số và các ứng dụng của đạo hàm.

I. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Phần này tập trung vào các quy tắc tính đạo hàm cho bốn hàm số lượng giác cơ bản: $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$ và các hàm hợp của chúng.

1. Đạo hàm của hàm số $y = \sin(x)$

Công thức: $(\sin x)' = \cos x$

Giải thích: Đạo hàm của hàm số $\sin(x)$ là hàm số $\cos(x)$. Điều này có nghĩa là tại mỗi điểm trên đồ thị hàm số $y = \sin(x)$, tốc độ thay đổi của hàm số (tức là độ dốc của tiếp tuyến) được cho bởi giá trị của hàm số $\cos(x)$ tại điểm đó.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = 5\sin(x)$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của một hằng số nhân với một hàm số

$(k \cdot f)' = k \cdot f'$, ta có:

$$y' = (5\sin x)' = 5 * (\sin x)' = 5\cos x.$$

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 + \sin(x)$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của một tổng $(u+v)' = u' + v'$, ta có:

$$y' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$$

2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos(x)$

Công thức: $(\cos x)' = -\sin x$

Giải thích: Đạo hàm của hàm số $\cos(x)$ là hàm số $-\sin(x)$. Dấu trừ cho thấy khi hàm $\cos(x)$ đang giảm (ví dụ trong khoảng $(0, \pi)$) thì tiếp tuyến có độ dốc âm.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = -2\cos(x)$.

Lời giải: $y' = (-2\cos x)' = -2 * (\cos x)' = -2 * (-\sin x) = 2\sin x.$

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x*\cos(x)$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của một tích $(u*v)' = u'v + uv'$, với $u = x$ và $v = \cos(x)$.

$$y' = (x)'*\cos(x) + x*(\cos x)' = 1*\cos(x) + x*(-\sin x) = \cos(x) - x\sin(x).$$

3. Đạo hàm của hàm số $y = \tan(x)$

Công thức: $(\tan x)' = 1 / \cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$

Giải thích: Công thức này được suy ra từ quy tắc đạo hàm của một thương ($\tan x = \sin x / \cos x$). Hàm số $\tan(x)$ không xác định khi $\cos(x) = 0$, do đó đạo hàm của nó cũng không xác định tại các điểm $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan(x) - 3x$.

Lời giải: $y' = (\tan x)' - (3x)' = 1/\cos^2(x) - 3$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = 5\tan(x)$.

Lời giải: $y' = (5\tan x)' = 5 * (\tan x)' = 5/\cos^2(x)$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = \cot(x)$

Công thức: $(\cot x)' = -1 / \sin^2(x) = -(1 + \cot^2(x))$

Giải thích: Tương tự như $\tan(x)$, công thức này được suy ra từ quy tắc đạo hàm của một thương ($\cot x = \cos x / \sin x$). Hàm số $\cot(x)$ không xác định khi $\sin(x) = 0$, do đó đạo hàm của nó cũng không xác định tại các điểm $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x + \cot(x)$.

Lời giải: $y' = (x)' + (\cot x)' = 1 - 1/\sin^2(x)$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x) * \cot(x)$.

Lời giải: Trước tiên, ta rút gọn hàm số: $y = \sin(x) * (\cos x / \sin x) = \cos(x)$ (với điều kiện $\sin x \neq 0$).

Vậy $y' = (\cos x)' = -\sin x$.

5. Bảng tổng hợp đạo hàm lượng giác cơ bản

Hàm số (y)	Đạo hàm (y')	Điều kiện
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$	Với mọi $x \in \mathbb{R}$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$	Với mọi $x \in \mathbb{R}$
$y = \tan(x)$	$y' = 1/\cos^2(x)$	$x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$y = \cot(x)$	$y' = -1/\sin^2(x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6. Đạo hàm của hàm số lượng giác hợp $y = f(u(x))$

Khi tính đạo hàm của hàm số lượng giác mà biến số bên trong không phải là x mà là một biểu thức của x (ký hiệu là $u = u(x)$), ta áp dụng quy tắc chuỗi (chain rule): $(f(u))' = u' * f'(u)$.

a. Đạo hàm của hàm số $y = \sin(u)$

Công thức: $(\sin u)' = u' * \cos u$

Giải thích: Ta lấy đạo hàm của biểu thức u theo x (tức là u'), rồi nhân với đạo hàm của hàm $\sin$ theo biến u (tức là $\cos u$).

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của $y = \sin(2x+1)$.

Lời giải: Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow u' = 2$. Áp dụng công thức, ta có:

$y' = (2x+1)' * \cos(2x+1) = 2\cos(2x+1)$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của $y = \sin(x^3)$.

Lời giải: Đặt $u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$. Áp dụng công thức, ta có:

$y' = (x^3)' * \cos(x^3) = 3x^2\cos(x^3)$.

b. Đạo hàm của hàm số $y = \cos(u)$

Công thức: $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của $y = \cos(5x)$.

Lời giải: Đặt $u = 5x \Rightarrow u' = 5$. Áp dụng công thức, ta có:

$$y' = -(5x)' \cdot \sin(5x) = -5\sin(5x).$$

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của $y = \cos(\sqrt{x})$.

Lời giải: Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow u' = 1/(2\sqrt{x})$. Áp dụng công thức, ta có:

$$y' = -(\sqrt{x})' \cdot \sin(\sqrt{x}) = -[1/(2\sqrt{x})] \cdot \sin(\sqrt{x}).$$

c. Đạo hàm của hàm số $y = \tan(u)$

Công thức: $(\tan u)' = u' / \cos^2(u)$

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của $y = \tan(x^2 - x)$.

Lời giải: Đặt $u = x^2 - x \Rightarrow u' = 2x - 1$. Áp dụng công thức, ta có:

$$y' = (2x - 1) / \cos^2(x^2 - x).$$

d. Đạo hàm của hàm số $y = \cot(u)$

Công thức: $(\cot u)' = -u' / \sin^2(u)$

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của $y = \cot(1/x)$.

Lời giải: Đặt $u = 1/x \Rightarrow u' = -1/x^2$. Áp dụng công thức, ta có:

$$y' = -(-1/x^2) / \sin^2(1/x) = 1 / (x^2 \sin^2(1/x)).$$

7. Bảng tổng hợp đạo hàm lượng giác hợp

Hàm số (y)	Đạo hàm (y')
$y = \sin(u)$	$y' = u' * \cos(u)$
$y = \cos(u)$	$y' = -u' * \sin(u)$
$y = \tan(u)$	$y' = u' / \cos^2(u)$
$y = \cot(u)$	$y' = -u' / \sin^2(u)$

II. Đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai mở rộng khái niệm đạo hàm, cho phép chúng ta nghiên cứu sâu hơn về sự biến thiên của hàm số và có nhiều ứng dụng trong vật lý.

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $f'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$.

Ký hiệu: y'' hoặc $f''(x)$.

Công thức: $f''(x) = (f'(x))'$

Giải thích: Đạo hàm cấp hai của một hàm số chính là đạo hàm của đạo hàm cấp một của nó. Nó đo lường tốc độ thay đổi của tốc độ thay đổi của hàm số ban đầu.

2. Cách tính đạo hàm cấp hai

Để tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. **Bước 1:** Tính đạo hàm cấp một $y' = f'(x)$ theo các quy tắc đã học.
2. **Bước 2:** Tính đạo hàm của kết quả vừa tìm được, tức là tính $y'' = (y')'$. Kết quả cuối cùng chính là đạo hàm cấp hai cần tìm.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$.

Lời giải:

Bước 1: Tính đạo hàm cấp một.

$$y' = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1)' = 4x^3 - 6x + 5.$$

Bước 2: Tính đạo hàm của y' .

$$y'' = (y')' = (4x^3 - 6x + 5)' = 12x^2 - 6.$$

Vậy, đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = 12x^2 - 6$.

- **Ví dụ 2:** Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin(2x)$.

Lời giải:

Bước 1: Tính đạo hàm cấp một.

Đây là hàm hợp $\sin(u)$ với $u = 2x$, nên $u' = 2$.

$$y' = (\sin(2x))' = u' * \cos(u) = 2\cos(2x).$$

Bước 2: Tính đạo hàm của y' .

$$y'' = (2\cos(2x))' = 2 * (\cos(2x))'.$$

Tiếp tục áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp $\cos(u)$ với $u = 2x$, $u' = 2$.

$$y'' = 2 * (-u' * \sin(u)) = 2 * (-2 * \sin(2x)) = -4\sin(2x).$$

Vậy, đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = -4\sin(2x)$.

3. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Trong vật lý, đặc biệt là trong chuyển động thẳng, đạo hàm cấp hai có ý nghĩa rất quan trọng.

- Cho một vật chuyển động có phương trình quỹ đạo theo thời gian là $s = s(t)$.
- Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t)$ (đạo hàm cấp một của quỹ đạo).
- Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t là $a(t) = v'(t) = s''(t)$ (đạo hàm cấp một của vận tốc, hay đạo hàm cấp hai của quỹ đạo).

Như vậy, đạo hàm cấp hai của hàm số quỹ đạo theo thời gian biểu thị gia tốc tức thời của chuyển động.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$.

Lời giải:

Phương trình quỹ đạo: $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$.

Vận tốc tức thời của chất điểm là đạo hàm cấp một của $s(t)$:

$$v(t) = s'(t) = (2t^3 - 9t^2 + 12t + 1)' = 6t^2 - 18t + 12.$$

Gia tốc tức thời của chất điểm là đạo hàm cấp hai của $s(t)$ (hoặc đạo hàm cấp một của $v(t)$):

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = (6t^2 - 18t + 12)' = 12t - 18.$$

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$ là:

$$a(3) = 12(3) - 18 = 36 - 18 = 18 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Vậy, gia tốc của chất điểm tại $t = 3s$ là 18 m/s^2 .

4. Đạo hàm cấp cao

Ngoài đạo hàm cấp hai, ta có thể mở rộng khái niệm này cho các cấp cao hơn (cấp 3, cấp 4, ..., cấp n).

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp $(n-1)$, ký hiệu là $y^{(n-1)}$.

Nếu đạo hàm cấp $(n-1)$ này có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$.

Ký hiệu: $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

Công thức: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = \sin(x)$.

Lời giải:

- Đạo hàm cấp 1: $y' = (\sin x)' = \cos x$.
- Đạo hàm cấp 2: $y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x$.
- Đạo hàm cấp 3: $y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x$.

Vậy, đạo hàm cấp 3 của hàm số là $y''' = -\cos x$.

III. Tổng kết

Chuyên đề này đã hệ thống hóa toàn bộ kiến thức cốt lõi về đạo hàm của hàm số lượng giác và đạo hàm cấp hai. Việc ghi nhớ các công thức cơ bản, hiểu rõ quy tắc đạo hàm hàm hợp và ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai sẽ giúp học sinh tự tin giải quyết các bài tập liên quan và tạo nền tảng vững chắc cho các chương sau.