

Chuyên đề: Ứng dụng Hệ thức Vi-ét để nhẩm nghiệm phương trình bậc hai

Hệ thức Vi-ét là một công cụ cực kỳ mạnh mẽ trong chương trình Toán lớp 9, không chỉ giúp giải các bài toán liên quan đến tổng và tích các nghiệm mà còn có những ứng dụng đặc biệt giúp chúng ta nhẩm nghiệm phương trình bậc hai một cách nhanh chóng và chính xác. Bài viết này sẽ tổng hợp đầy đủ kiến thức về chuyên đề này.

I. Nhắc lại về Định lý Vi-ét

1. Phát biểu định lý

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (với $a \neq 0$) có hai nghiệm là x_1 và x_2 , thì tổng và tích của hai nghiệm đó được tính theo công thức:

- **Tổng hai nghiệm (S):** $x_1 + x_2 = -b/a$

- **Tích hai nghiệm (P):** $x_1 * x_2 = c/a$

Lưu ý quan trọng: Định lý Vi-ét chỉ được áp dụng khi phương trình bậc hai đã cho có nghiệm, tức là biệt thức delta ($\Delta = b^2 - 4ac$) phải lớn hơn hoặc bằng 0 ($\Delta \geq 0$).

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho phương trình $2x^2 - 8x + 5 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm.

Phân tích:

1. Xác định các hệ số: $a = 2, b = -8, c = 5$.
2. Kiểm tra điều kiện có nghiệm: $\Delta' = (-4)^2 - 2 \cdot 5 = 16 - 10 = 6 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt.
3. Áp dụng hệ thức Vi-ét:
 - Tổng các nghiệm: $S = x_1 + x_2 = -b/a = -(-8)/2 = 4$.
 - Tích các nghiệm: $P = x_1 \cdot x_2 = c/a = 5/2$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $-3x^2 + x + 7 = 0$. Tính tổng và tích các nghiệm (nếu có).

Phân tích:

1. Xác định các hệ số: $a = -3, b = 1, c = 7$.
2. Kiểm tra điều kiện có nghiệm: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 7 = 1 + 84 = 85 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt.
3. Áp dụng hệ thức Vi-ét:
 - Tổng các nghiệm: $S = x_1 + x_2 = -b/a = -1/(-3) = 1/3$.
 - Tích các nghiệm: $P = x_1 \cdot x_2 = c/a = 7/(-3) = -7/3$.

II. Ứng dụng nhẩm nghiệm phương trình bậc hai

Dựa vào định lý Vi-ét, ta có hai trường hợp đặc biệt của các hệ số a, b, c giúp nhẩm nghiệm rất nhanh mà không cần tính delta.

1. Trường hợp 1: $a + b + c = 0$

Công thức: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình chắc chắn có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = c/a$.

Giải thích:

Khi $a + b + c = 0$, ta có thể suy ra $b = -a - c$. Thay vào phương trình ban đầu:

$$ax^2 + (-a - c)x + c = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 - ax - cx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (ax^2 - ax) - (cx - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax(x - 1) - c(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(ax - c) = 0$$

Từ đây, ta có hai trường hợp:

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $ax - c = 0 \Leftrightarrow x = c/a$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = c/a$. Cách chứng minh này cho thấy tại sao công thức nhẩm nghiệm lại đúng.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình $5x^2 - 3x - 2 = 0$ bằng cách nhẩm nghiệm.

Phân tích:

1. Xác định hệ số: $a = 5$, $b = -3$, $c = -2$.

2. Kiểm tra điều kiện nhẩm nghiệm: Ta thấy $a + b + c = 5 + (-3) + (-2) = 5 - 3 - 2 = 0$.

3. Kết luận nghiệm: Vì $a + b + c = 0$, phương trình có hai nghiệm là:

- $x_1 = 1$
- $x_2 = c/a = -2/5$

Ví dụ 2: Giải phương trình $2024x^2 + x - 2025 = 0$.

Phân tích:

1. Xác định hệ số: $a = 2024$, $b = 1$, $c = -2025$.

2. Kiểm tra điều kiện nhẩm nghiệm: Ta thấy $a + b + c = 2024 + 1 + (-2025) = 2025 - 2025 = 0$.

3. Kết luận nghiệm: Phương trình có hai nghiệm là:

- $x_1 = 1$
- $x_2 = c/a = -2025/2024$

2. Trường hợp 2: $a - b + c = 0$

Công thức: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$ thì phương trình chắc chắn có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -c/a$.

Giải thích:

Khi $a - b + c = 0$, ta có thể suy ra $b = a + c$. Thay vào phương trình ban đầu:

$$ax^2 + (a + c)x + c = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + ax + cx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (ax^2 + ax) + (cx + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax(x + 1) + c(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(ax + c) = 0$$

Từ đây, ta có hai trường hợp:

- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -c/a$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -c/a$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình $3x^2 + 7x + 4 = 0$ bằng cách nhẩm nghiệm.

Phân tích:

1. Xác định hệ số: $a = 3, b = 7, c = 4$.
2. Kiểm tra điều kiện nhẩm nghiệm: Ta thấy $a - b + c = 3 - 7 + 4 = 0$.
3. Kết luận nghiệm: Vì $a - b + c = 0$, phương trình có hai nghiệm là:
 - $x_1 = -1$
 - $x_2 = -c/a = -4/3$

Ví dụ 2: Giải phương trình $-x^2 + 9x + 10 = 0$.

Phân tích:

1. Xác định hệ số: $a = -1, b = 9, c = 10$.

2. Kiểm tra điều kiện nhẩm nghiệm: Ta thấy $a - b + c = -1 - 9 + 10 = -10 + 10 = 0$.

3. Kết luận nghiệm: Phương trình có hai nghiệm là:

- $x_1 = -1$
- $x_2 = -c/a = -10/(-1) = 10$

III. Bảng tổng hợp và các bước nhẩm nghiệm

1. Bảng tổng hợp 2 trường hợp đặc biệt

Điều kiện của hệ số	Nghiệm thứ nhất (x_1)	Nghiệm thứ hai (x_2)
$a + b + c = 0$	1	c/a
$a - b + c = 0$	-1	$-c/a$

2. Các bước tư duy khi nhẩm nghiệm

Khi gặp một phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, hãy làm theo các bước sau để tìm nghiệm một cách hiệu quả nhất:

- Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c.** Luôn cẩn thận với dấu của các hệ số.
- Bước 2: Kiểm tra trường hợp $a + b + c = 0$.** Nếu tổng bằng 0, kết luận ngay nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = c/a$.
- Bước 3: Kiểm tra trường hợp $a - b + c = 0$.** Nếu Bước 2 không thỏa mãn, tiếp tục kiểm tra điều kiện này. Nếu nó đúng, kết luận ngay nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -c/a$.

4. **Bước 4: Sử dụng công thức nghiệm tổng quát.** Nếu cả hai trường hợp đặc biệt trên đều không xảy ra, ta quay về phương pháp giải thông thường bằng cách tính biệt thức Δ (hoặc Δ') và áp dụng công thức nghiệm.

IV. Bài tập vận dụng

Sử dụng phương pháp nhẩm nghiệm để tìm nghiệm của các phương trình sau:

1. $x^2 + 6x + 5 = 0$

2. $7x^2 + x - 8 = 0$

3. $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

4. $-12x^2 - 5x + 17 = 0$

5. $2x^2 + (\sqrt{2} - 2)x - \sqrt{2} = 0$

Đáp án và hướng dẫn:

- **Câu 1:** $a = 1, b = 6, c = 5$. Ta có $a - b + c = 1 - 6 + 5 = 0$. Vậy nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -c/a = -5/1 = -5$.
- **Câu 2:** $a = 7, b = 1, c = -8$. Ta có $a + b + c = 7 + 1 + (-8) = 0$. Vậy nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = c/a = -8/7$.
- **Câu 3:** $a = 1, b = -(1 + \sqrt{3}), c = \sqrt{3}$. Ta có $a + b + c = 1 - (1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 1 - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$. Vậy nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = c/a = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$.
- **Câu 4:** $a = -12, b = -5, c = 17$. Ta có $a - b + c = -12 - (-5) + 17 = -12 + 5 + 17 = -12 + 22 = 10 \neq 0$. Và $a + b + c = -12 - 5 + 17 = 0$. Vậy nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = c/a = 17/(-12) = -17/12$.

- **Câu 5:** $a = 2$, $b = \sqrt{2} - 2$, $c = -\sqrt{2}$. Ta có $a + b + c = 2 + (\sqrt{2} - 2) + (-\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = 0$. Vậy nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = c/a = -\sqrt{2}/2$.

VIDOCU.COM