

I. Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số

1. Dạng cơ bản và công thức

Đây là phương pháp cơ bản nhất để giải phương trình mũ. Nguyên tắc của phương pháp này là biến đổi phương trình về dạng hai vế có cùng một cơ số dương và khác 1.

Công thức tổng quát:

Với cơ số $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Giải thích: Nếu hai lũy thừa bằng nhau và có cùng cơ số (lớn hơn 0, khác 1), thì số mũ của chúng phải bằng nhau.

2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1:

Giải phương trình: $3^{x-1} = 27$

Phân tích: Ta thấy 27 có thể biểu diễn dưới dạng lũy thừa của 3 ($27 = 3^3$). Do đó, ta sẽ đưa hai vế về cùng cơ số 3.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương:

$$3^{x-1} = 3^3$$

$$\Rightarrow x - 1 = 3$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

Ví dụ 2:

Giải phương trình: $(0.5)^{x^2 - 5x + 4} = 1$

Phân tích: Mọi số (khác 0) mũ 0 đều bằng 1. Ta có thể viết $1 = (0.5)^0$ để đưa về cùng cơ số 0.5.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương:

$$(0.5)^{x^2 - 5x + 4} = (0.5)^0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Đây là phương trình bậc hai có $a + b + c = 1 + (-5) + 4 = 0$, nên có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = c/a = 4$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{1, 4\}$.

Ví dụ 3:

Giải phương trình: $(2/3)^{4x} = (3/2)^{2-x}$

Phân tích: Hai cơ số $(2/3)$ và $(3/2)$ là nghịch đảo của nhau. Ta có thể sử dụng tính chất $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$.

Lời giải:

Ta có $(3/2) = (2/3)^{-1}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$(2/3)^{4x} = [(2/3)^{-1}]^{2-x}$$

$$\Rightarrow (2/3)^{4x} = (2/3)^{-(2-x)}$$

$$\Rightarrow (2/3)^{4x} = (2/3)^{x-2}$$

$$\Rightarrow 4x = x - 2$$

$$\Rightarrow 3x = -2$$

$$\Rightarrow x = -2/3$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2/3\}$.

II. Phương pháp giải bất phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số

1. Dạng cơ bản và quy tắc

Tương tự như phương trình mũ, ta cũng biến đổi bất phương trình về dạng hai vế có cùng một cơ số. Tuy nhiên, cần phải đặc biệt chú ý đến giá trị của cơ số **a**.

Hàm số mũ $y = a^x$:

- Đồng biến khi $a > 1$.
- Nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Từ đó, ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp	Bất phương trình	Kết quả	Lưu ý
Cơ số $a > 1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$f(x) > g(x)$	Giữ nguyên chiều của bất đẳng thức.
Cơ số $0 < a < 1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$f(x) < g(x)$	Đảo chiều của bất đẳng thức.

Công thức tổng quát:

- Nếu $a > 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$
- Nếu $0 < a < 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

(Quy tắc tương tự áp dụng cho các dấu $\leq, \geq, =$)

2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1 (Cơ số $a > 1$):

Giải bất phương trình: $2^{x^2 - x} \geq 4$

Phân tích: Đưa về cùng cơ số 2. Ta có $4 = 2^2$. Vì cơ số $a = 2 > 1$ nên ta giữ nguyên chiều bất phương trình.

Lời giải:

Bất phương trình đã cho tương đương:

$$2^{x^2 - x} \geq 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x \geq 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - x - 2$ có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$. Hệ số $a = 1 > 0$, nên $f(x) \geq 0$ khi x nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 2$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Ví dụ 2 (Cơ số 0 a 1):

Giải bất phương trình: $(1/7)^{-x^2 + 2x + 4} > 49^{x-1}$

Phân tích: Ta có thể đưa về cùng cơ số 7 hoặc $1/7$. Ở đây ta chọn đưa về cơ số $1/7$. Ta có $49 = 7^2 = (1/7)^{-2}$. Vì cơ số $a = 1/7$ (nằm trong khoảng $(0, 1)$) nên ta phải đảo chiều bất phương trình.

Lời giải:

Bất phương trình đã cho tương đương:

$$(1/7)^{-x^2 + 2x + 4} > [(1/7)^{-2}]^{x-1}$$

$$\Rightarrow (1/7)^{-x^2 + 2x + 4} > (1/7)^{-2(x-1)}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 4 > -2(x-1) \text{ (Lưu ý: Đảo chiều bất đẳng thức)}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 4 > -2x + 2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 2 < 0$$

Xét tam thức $g(x) = x^2 - 4x - 2$ có hai nghiệm là $x = 2 - \sqrt{6}$ và $x = 2 + \sqrt{6}$. Hệ số $a = 1 > 0$, nên $g(x) < 0$ khi x nằm trong khoảng hai nghiệm.

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{6} \times 2 + \sqrt{6}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6})$.

III. Một số lưu ý quan trọng khi giải

- 1. Luôn kiểm tra cơ số:** Đây là bước quan trọng nhất khi giải bất phương trình mũ. Nếu $a > 1$, giữ nguyên chiều; nếu $0 < a < 1$, đảo chiều. Sai lầm ở bước này sẽ dẫn đến kết quả sai hoàn toàn.
- 2. Nắm vững các phép biến đổi lũy thừa:** Để đưa về cùng cơ số, bạn cần thành thạo các công thức như:
 - $a^{-n} = 1/a^n$
 - $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
 - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
 - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- 3. Điều kiện xác định:** Luôn chú ý đến điều kiện xác định của các biểu thức trong số mũ (nếu có chứa căn, mẫu số, logarit...).
- 4. Giải bất phương trình cuối cùng:** Sau khi đã loại bỏ cơ số, ta được một bất phương trình đại số (bậc nhất, bậc hai,...). Cần áp dụng đúng quy tắc xét dấu để tìm ra tập nghiệm cuối cùng.