

Tổng hợp phương pháp xác định khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong không gian

Trong chương trình Hình học không gian lớp 11, bài toán tính khoảng cách là một dạng toán quan trọng và thường xuất hiện trong các kỳ thi. Tài liệu này sẽ tổng hợp một cách đầy đủ và chi tiết các phương pháp xác định khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, giúp các bạn học sinh nắm vững kiến thức và tự tin giải quyết các bài toán liên quan.

1. Định nghĩa và tính chất cơ bản

a. Định nghĩa

Cho điểm M và đường thẳng d trong không gian. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d .

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d , ký hiệu là $d(M, d)$, là độ dài của đoạn thẳng MH .

Công thức: $d(M, d) = MH$, trong đó H là điểm trên d sao cho $MH \perp d$.

b. Tính chất

- Đoạn thẳng MH là đoạn ngắn nhất trong tất cả các đoạn thẳng nối từ M đến một điểm bất kỳ trên đường thẳng d . Tức là, với mọi điểm K thuộc d ($K \neq H$), ta luôn có $MK > MH$.

- Khoảng cách $d(M, d)$ luôn là một số không âm. $d(M, d) = 0$ khi và chỉ khi điểm M thuộc đường thẳng d .

2. Phương pháp 1: Dựng hình trực tiếp (Phương pháp hình học)

Đây là phương pháp cơ bản và phổ biến nhất, dựa trên việc dựng trực tiếp đoạn vuông góc từ điểm đến đường thẳng và sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác để tính toán.

a. Các bước thực hiện

1. **Bước 1:** Xác định một mặt phẳng (P) chứa điểm M và đường thẳng d . Đây là bước quan trọng để có không gian làm việc. Trong hầu hết các bài toán, mặt phẳng này thường có sẵn hoặc dễ dàng xác định.
2. **Bước 2:** Trong mặt phẳng (P) , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H ($MH \perp d, H \in d$). Khi đó, H chính là hình chiếu của M lên d .
3. **Bước 3:** Gắn độ dài MH vào một tam giác phù hợp (thường là tam giác vuông) và sử dụng các hệ thức lượng (định lý Pytago, tỉ số lượng giác sin-cos-tan, hệ thức trong tam giác vuông) để tính độ dài MH .

b. Các công thức thường dùng

Xét tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH :

- **Định lý Pytago:** $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- **Hệ thức về đường cao:** $1/AH^2 = 1/AB^2 + 1/AC^2$
- **Hệ thức diện tích:** $AB.AC = AH.BC$

- **Tỉ số lượng giác:** $\sin(B) = AC/BC$, $\cos(B) = AB/BC$, $\tan(B) = AC/AB$

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SB.

Phân tích:

- Ta cần tính $d(A, SB)$.
- Xét mặt phẳng chứa A và SB, đó chính là mặt phẳng (SAB).
- Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$. Do đó, tam giác SAB là tam giác vuông tại A.
- Trong tam giác vuông SAB, ta chỉ cần kẻ đường cao từ A xuống cạnh huyền SB.

Lời giải:

Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $AH \perp SB$ tại H. Khi đó, $d(A, SB) = AH$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có đường cao AH. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$$

$$\text{Thay số liệu: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy, khoảng cách từ A đến đường thẳng SB là **$\frac{a\sqrt{6}}{3}$** .

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC.

Phân tích:

- Ta cần tính $d(A, SC)$.
- Mặt phẳng chứa A và SC là mặt phẳng (SAC).
- Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AC$. Do đó, tam giác SAC là tam giác vuông tại A.
- Tương tự ví dụ 1, ta kẻ đường cao từ A xuống cạnh huyền SC.

Lời giải:

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $AK \perp SC$ tại K. Khi đó, $d(A, SC) = AK$.

Đáy ABCD là hình vuông cạnh a, nên đường chéo $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, có đường cao AK. Áp dụng hệ thức lượng:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\text{Thay số liệu: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AK^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy, khoảng cách từ A đến đường thẳng SC là $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

3. Phương pháp 2: Tính toán gián tiếp (Sử dụng diện tích tam giác)

Phương pháp này không dựng trực tiếp đường vuông góc mà tính độ dài của nó thông qua công thức diện tích. Đây là một cách tiếp cận hiệu quả khi việc dựng hình và tính toán trực tiếp gặp khó khăn.

a. Cơ sở phương pháp

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d, ta thực hiện:

1. Chọn hai điểm A, B bất kỳ trên đường thẳng d.
2. Khi đó, ta có tam giác MAB. Khoảng cách từ M đến đường thẳng d chính là độ dài đường cao MH của tam giác MAB kẻ từ đỉnh M xuống cạnh AB.
3. Sử dụng công thức diện tích tam giác: $S_{MAB} = (1/2) * MH * AB$

Từ đó suy ra công thức tính khoảng cách:

$$d(M, d) = MH = (2 * S_{MAB}) / AB$$

Vấn đề của bài toán trở thành tính diện tích tam giác MAB và độ dài đoạn thẳng AB.

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng B'D'.

Phân tích:

- Ta cần tính $d(A, B'D')$.

- Việc dựng hình chiếu trực tiếp từ A xuống B'D' khá phức tạp.
- Ta sẽ sử dụng phương pháp diện tích. Xét tam giác AB'D'. Khoảng cách cần tìm là đường cao AH kẻ từ A của tam giác này.
- Ta cần tính các cạnh của tam giác AB'D' để tính diện tích của nó.

Lời giải:

Xét tam giác AB'D'. Ta có:

- AB' là đường chéo của hình vuông ABB'A' cạnh a $\Rightarrow \mathbf{AB' = a\sqrt{2}}$.
- AD' là đường chéo của hình vuông ADD'A' cạnh a $\Rightarrow \mathbf{AD' = a\sqrt{2}}$.
- B'D' là đường chéo của hình vuông A'B'C'D' cạnh a $\Rightarrow \mathbf{B'D' = a\sqrt{2}}$.

Vì $AB' = AD' = B'D' = a\sqrt{2}$, nên tam giác AB'D' là tam giác đều.

Khoảng cách từ A đến đường thẳng B'D' chính là độ dài đường cao AH của tam giác đều AB'D'.

Áp dụng công thức đường cao trong tam giác đều ($h = \text{cạnh} * \sqrt{3} / 2$):

$$\mathbf{d(A, B'D') = AH = (AB' * \sqrt{3}) / 2 = (a\sqrt{2} * \sqrt{3}) / 2 = a\sqrt{6} / 2}$$

Vậy, khoảng cách từ A đến đường thẳng B'D' là $\mathbf{a\sqrt{6} / 2}$.

4. Bảng tổng hợp và lưu ý

Để giúp học sinh lựa chọn phương pháp phù hợp, dưới đây là bảng so sánh hai phương pháp chính:

Tiêu chí	Phương pháp 1: Dựng hình trực tiếp	Phương pháp 2: Dùng diện tích tam giác
Bản chất	Dựng đoạn vuông góc MH và dùng hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài trực tiếp.	Tính gián tiếp độ dài đường cao MH thông qua công thức $h = \frac{2S}{a}$.
Khi nào áp dụng	Khi dễ dàng xác định được hình chiếu H của M lên d. Thường gặp trong các hình có nhiều yếu tố vuông góc (hình chóp có cạnh bên vuông góc đáy, hình lăng trụ đứng,...).	Khi việc dựng hình chiếu trực tiếp khó khăn, nhưng việc tính độ dài các cạnh của tam giác liên quan lại đơn giản, từ đó dễ dàng tính được diện tích.
Lưu ý quan trọng	• Phải chứng minh được $MH \perp d$. • Vận dụng đúng các hệ thức lượng trong tam giác vuông. • Vẽ hình rõ ràng, chính xác.	• Tính chính xác độ dài 3 cạnh của tam giác. • Sử dụng đúng công thức tính diện tích (Heron nếu biết 3 cạnh, $S = \frac{1}{2}ab.\sin C$, $S = \frac{1}{2}$ đáy x cao,...).

Lưu ý chung: Trong nhiều trường hợp, hai phương pháp này có thể kết hợp với nhau. Việc nắm vững cả hai sẽ giúp bạn linh hoạt hơn trong việc tìm ra lời giải ngắn gọn và chính xác nhất. Chúc các bạn học tốt!